KING-LAI HIONG

Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 72, nº 2 (1955), p. 165-197
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_2_165_0>

SUR LES

FONCTIONS HOLOMORPHES

DONT

LES DÉRIVÉES ADMETTENT UNE VALEUR EXCEPTIONNELLE

PAR M. KING-LAI HIONG.

Concernant la théorie des familles normales, les valeurs lacunaires de Picard jouent un rôle important. Dans une étude précédente [1], nous avons essayé d'introduire des valeurs exceptionnelles au sens de M. Borel. Mais comme il n'est pas commode, pour le problème qui nous occupait, d'utiliser directement une telle valeur, à cause de l'intervention de l'ordre de la fonction dans sa définition, c'était au moyen d'une conséquence de l'hypothèse que les fonctions considérées admettent deux valeurs exceptionnelles que nous avons pu arriver à obtenir quelques résultats.

Ici nous considérons une catégorie de valeurs exceptionnelles que nous définissons sans intervention de l'ordre de la fonction et que nous convenons d'appeler *valeurs exceptionnelles* B. Nous démontrons que si une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité, telle que $T(r) : \log\frac{1}{1-r}$ tend vers l'infini pour $r \to 1$, c'est-à-dire que le théorème de Picard-Borel s'applique, elle ne peut admettre plus de deux valeurs exceptionnelles B.

Par considération des valeurs exceptionnelles ainsi définies, nous trouvons, avec plus de précision, des résultats analogues à tous ceux obtenus antérieurement concernant les valeurs exceptionnelles de Picard-Borel. Puis nous pouvons étudier le cas où intervient la dérivée de chaque fonction considérée, même le cas où la dérivée intervenue est d'un ordre quelconque.

Nous nous plaçons notamment dans ce dernier cas pour le présent Mémoire.

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. LXX, fasc. 2, 1953, p. 149-180.

Pour éliminer les valeurs initiales des dérivées qui peuvent s'introduire dans l'inégalité que nous prenons comme point de départ, nous commençons par établir une inégalité permettant de majorer $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, inégalité qui est plus précise que celle que nous avons donné dans le travail précédent et qui ne contient que la valeur initiale $f(0)$ comme celle de M. R. Nevanlinna relative à $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$. Ensuite, nous trouvons pour $m\left(r, \frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$ une limitation qui ne contient pas de valeurs initiales des dérivées, et qui est plus précise aussi que celle déjà obtenue antérieurement (²).

Pour établir le théorème de base sur la croissance d'une fonction, nous partons d'une identité due à M. Bureau comme dans la démonstration de Valiron pour le théorème de M. Miranda. Au moyen des résultats précédents, nous majorons alors les valeurs moyennes logarithmiques que contient l'inégalité déduite de cette identité. Puis, l'application d'un lemme que nous avons établi ailleurs nous conduit au résultat en vue.

En ce qui concerne les familles de fonctions, nous introduisons une nouvelle notion pour bien préciser un fait, c'est celle d'une *valeur également exceptionnelle*. En nous appuyant sur le théorème de base et à l'aide d'un résultat de M. Paul Montel, nous arrivons alors à obtenir des critères de normalité ou de quasi-normalité (³).

En terminant, je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous ceux qui sont venus en aide dans mon état de santé gravement ébranlée, en particulier à la Commission des Fonds de l'Université de Tsing-Hua dont la subvention me facilite grandement la continuation de mon traitement en même temps que celle de mes recherches.

CHAPITRE I.

Préliminaires.

I. — Rappel de deux propositions déjà établies et d'une inégalité connue.

1. Concernant les fonctions croissantes, nous avons démontré (⁴) selon le principe de M. Borel les lemmes suivants qui sont plus généraux que celui de M. Bureau et plus commodes à appliquer.

Lemme A. — *Soient* $U(r)$ *une fonction positive continue non décroissante pour* $0 < r < 1$ *et* $\omega(r)$ *une fonction positive et finie pour cet intervalle de* r*; si, en dési-*

(²) *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2279.

(³) Une partie des résultats du présent travail a été communiquée à l'Académie des Sciences de Paris (séance du 25 avril 1955).

(⁴) *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1939-1941.

gnant par a, b, c *des constantes numériques et en supposant* $a \geqq 0$, $b > 0$, $c > 0$, *l'inégalité*

$$U(r) \leqq a\,\omega(r) + b \log\frac{1}{R-r} + c \overset{+}{\log} U(R) \qquad (r < R < 1) \tag{1}$$

est vérifiée pour $r \geqq r_0 > 0$, *on aura alors pour* $r \geqq r_0$ *l'inégalité*

$$U(r) < A\,\omega(r) + B \log\frac{2}{1-r}, \tag{2}$$

où A, B *sont des constantes numériques.*

LEMME B. — *Soient* $U(r)$ *une fonction positive continue non décroissante pour* $0 < r < 1$ *et* $\omega(r)$ *une fonction positive et finie pour le même intervalle; si, en désignant par* p, α, β, γ *des constantes numériques et en supposant* $p \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$, $\beta > 1$, $\gamma > 1$, *on a*

$$U(r) < \frac{1}{(R-r)^p}\left[\alpha\,\omega(r) + \beta \log\frac{1}{R-r} + \gamma \overset{+}{\log} U(R)\right] \tag{3}$$

pour $0 < r_0 \leqq r < R < 1$, *alors on aura pour* $r \geqq r_0$ *et* $r' = \dfrac{r+1}{2}$,

$$U(r) < \frac{1}{(1-r)^p}\left[A\big(\omega(r) + \omega(r') + 1\big) + B \log\frac{2}{1-r}\right], \tag{4}$$

A, B *étant deux constantes numériques dont* A *ne dépend que de* p, α, β, γ, *tandis que* B *ne dépend que de* p, β *et* γ.

Remarque. — Soit R′ une valeur inférieure à 1; au lieu de (4), on peut prendre aussi, pour $r_0 \leqq r < R'$ et $r' = \dfrac{r+R'}{2}$, l'inégalité

$$U(r) < \frac{1}{(R'-r)^p}\left[A\big(\omega(r) + \omega(r') + 1\big) + B \log\frac{2}{R'-r}\right]. \tag{4'}$$

2. Rappelons encore une inégalité connue dont nous aurons besoin fréquemment.

Soit $F(z)$ une fonction méromorphe; si l'on désigne par b_ν ses pôles dans le cercle $|z| < R$, on a

$$\log|F(z)| \leqq \frac{R+r}{R-r} m(R, F) - \frac{R-r}{R+r} m\left(R, \frac{1}{F}\right) + \sum_\nu \log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_\nu z}{R(z-b_\nu)}\right| \tag{5}$$

pour $|z| = r < R < 1$.

II. — Limitations de certaines valeurs moyennes logarithmiques.

3. Nous avons obtenu antérieurement [5] deux lemmes qui fournissent le

---

[5] Mémoire cité dans l'Introduction.

premier pour $\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$ une limitation ne contenant aucune valeur initiale et le second pour $\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right)$ une limitation ne contenant que la première valeur initiale $f(0)$ sous la forme $\log|f(0)|$. Nous nous sommes aperçu que ces énoncés ne sont pas suffisamment précis et qu'ils manquent de rigueur pour certains points de la démonstration. Nous les rappelons améliorés ici avec une démonstration complémentaire.

Lemme I. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité qui ne s'annule que p fois. On suppose que $f(0) \neq 0$ et l'on désigne par $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ ses zéros; de chaque a_ν comme centre on décrit un cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ_ν. Puis soient d un nombre positif tel que*

$$|a_1| \geqq d, \qquad |1 - a_p| \geqq d, \qquad |a_i - a_j| \geqq d \qquad (a_i \neq a_j)$$

et δ_0 le plus petit des δ_ν. Alors, on a pour $0 < r < \rho < 1$ l'inégalité

$$(6) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < \mathrm{A}_k\left(p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu'=0}^{n(r,0)} \log\frac{1}{\delta_{\nu'}}\right) + \mathrm{B}_k \log\frac{1}{\rho - r} + \mathrm{C}_k \log \mathrm{V}_0(\rho, f),$$

où

$$\mathrm{V}_0(r, f) = m(r, f) + \mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

A_k, B_k, C_k sont des constantes numériques ne dépendant que de d à part k (⁶).

De la formule de Poisson-Jensen, nous avons déduit l'égalité

$$(7) \qquad \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] = \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{R}e^{i\varphi})| \frac{2\mathrm{R}e^{i\varphi}}{(\mathrm{R}e^{i\varphi} - z)^{k+1}} d\varphi + \sum_{\nu}^{n(\mathrm{R},0)} \left[\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z - a_\nu)^k} + \frac{(k-1)!\,\bar{a}_\nu^{k-1})}{(\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z)^k}\right].$$

Désignons par (C_r) le cercle $|z| = r$ et faisons d'abord varier r entre 0 et $\mathrm{R}_1 = |a_p|$. Pour chaque valeur de r, choisissons une valeur R de façon que $\frac{d}{2} \leqq \mathrm{R} - r < d$ et que pour les zéros a_ν intérieurs au cercle $|z| < \mathrm{R}$, on ait

$$\mathrm{R} - |a_\nu| \geqq \frac{d}{2}.$$

Séparons la sommation de (7) en deux parties; l'une S_1 s'étendant aux zéros a_ν dont les modules $a_\nu| \leqq r$, et l'autre S_2 concernant les zéros $a_{\mu\nu}$ tels que $r < |a_\nu| < \mathrm{R}$. En excluant éventuellement de la circonférence $|z| = r$ les points

---

(⁶) Dans la suite, nous désignerons toujours par A_k, B_k, C_k, A'_k, ..., α_k, M_k, ... des constantes numériques ne dépendant que de k, s'il n'y a pas d'autres précisions.

situés dans certains (γ_ν), on a

$$|S_1| < (k-1)! \sum_{\nu=1}^{n(r,0)} \left[\frac{1}{\delta_\nu^k} + \frac{1}{2r(R-r)^k} \right],$$

et

$$|S_2| < (k-1)! \sum_{\nu} \left[\frac{1}{\delta_0^k} + \frac{|\overline{a_\nu}|^{k-1}}{|a_\nu|^k (R-r)^k} \right] < (k-1)!\, p \left(\frac{1}{\delta_0^k} + \frac{1}{r(R-r)^k} \right).$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$\left| \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{f'}{f} \right] \right| < P_k \left[p, \frac{1}{r}, \frac{1}{\delta_0}, \sum_{\nu=1}^{n(r,0)} \frac{1}{\delta_\nu^k}, \frac{1}{R-r}, V \right], \tag{8}$$

P_k étant un polynome des arguments dont $V = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right)$.

De cette inégalité, on déduit aisément

$$\overset{+}{\log} \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| < A'_k \left(p + \log \frac{1}{r} + \sum_{\nu'=0}^{n(r,0]} \log \frac{1}{\delta_{\nu'}} \right) + B'_k \log \frac{1}{R-r} + C'_k \overset{+}{\log} V(R, f), \tag{9}$$

où A'_k, B'_k, C'_k sont des constantes numériques ne dépendant que de k.

En observant alors que $R - r \geqq \frac{d}{2}(\rho - r)$ pour $0 < r < \rho < 1$ et que

$$V(r, f) < V_0(r, f),$$

on arrive à obtenir une inégalité de forme (6).

Maintenant, pour $R_1 < r < 1$, la sommation de (7) devient plus facile à majorer; on voit de suite que son module est inférieur à

$$(k-1)! \sum_{\nu'=1}^{n(r,0)} \left[\frac{1}{|z - a_\nu|^k} + \frac{1}{r(R-r)^k} \right]$$

et l'on trouve l'inégalité

$$\overset{+}{\log} \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| < A''_k \left(p + \log \frac{1}{r} + \sum_{\nu=1}^{n(r,0)} \frac{1}{\delta_\nu} \right) + B''_k \log \frac{1}{R-r} + C''_k \overset{+}{\log} V(R, f)$$

pour $r < R < 1$. Ici R est arbitraire et r peut être aussi voisin de 1 que l'on veut; il suffit de changer R en ρ.

La démonstration s'achève alors immédiatement.

Remarque. — 1° Dans le cas où la fonction a une infinité de zéros, le lemme est valable avec un peu de modification. On considère un cercle (C′) de centre O et de rayon $R'(<1)$ aussi voisin de 1 que l'on veut. Dans l'énoncé, on remplace alors $1 - |\alpha_p|$ par $R' - |a_\nu|$ $(|a_\nu| < R')$ et p par $\Delta(R', r) = n^\star(R', 0) - n(r, 0)$, $n^\star(R, 0)$ désignant le nombre des zéros a_ν tels que $|a_\nu| < R$ et dans la démonstration, on prend pour a_p le zéro qui est le plus proche de la circonférence (C′).

2° En observant que l'on peut prendre un nombre λ assez grand pour que $n^*(R, 0) < \lambda[1 + n(r, 0)]$ et en traçant, des centres a_ν, des cercles de même rayon arbitrairement petit δ, l'inégalité analogue à (6) peut être mise sous la forme plus simple

$$(6') \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k\left(\log\frac{1}{r} + n(r, 0)\log\frac{1}{\delta}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log V_0(\rho, f)$$

valable pour $0 < r < \rho < R'$. H_k et K_k dépendent alors de λ par suite de $\bar{n}(R', 0)$.

4. A l'aide du lemme précédent, on peut établir le suivant :

Lemme II. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité qui ne s'annule que p fois ; on conserve les notations et les hypothèses du lemme* I. *En se donnant un cercle* (C') *de centre* O *et de rayon quelconque* $R'(< 1)$ *et en désignant par δ_0 le plus petit des δ_ν, ou bien on a pour $0 < r < R'$ l'inégalité*

$$(10) \qquad m(r, f) < H_k\left(\log|f(0)| + p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu'=0}^{n(r,0)} \log\frac{1}{\delta_{\nu'}}\right) + K_k \log\frac{2}{\rho - r},$$

ou bien, il existe alors au moins un point z_1 tel que $|f^{(k)}(z_1)| \geqq 1$, et en prenant une valeur R_0 telle que $\log|f(z_1)| < \frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}$ pour $r \geqq R_0$, on a, pour $r_0 \geqq R_0$ et $R' < r_0 \leqq r < \rho < 1$, l'inégalité

$$(11) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}|f(0)| + p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu'=0}^{n(r,0)} \log\frac{2}{\delta_{\nu'}}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} V_0(\rho, f)\right],$$

où H_k, K_k, α_k, β_k et γ_k sont des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de d et k et les trois dernières ne dépendent que de k, d et R_0, dans le cas général et de d seulement dans le cas où $k = 1$.

Désignons par (D') le domaine limité par (C') et les circonférences (γ_ν) dont les centres sont intérieurs à (C').

Supposons d'abord que $|f^{(k)}(z)| < 1$ quel que soit le point z intérieur à (D'). Prenons d'une façon arbitraire un nombre positif M. Si l'on a $|f^{(k-1)}(z)| \geqq M$ quel que soit z dans (D'), alors on a dans ce domaine

$$\left|\frac{1}{f}\right| \leqq \frac{1}{M}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right|,$$

puisque f ne s'y annule pas. Eu égard à une propriété de $m(r, f)$ [7], on déduit

[7] Il est facile de démontrer que si l'on exclut de la circonférence $|z| = r$ un nombre fini d'arcs arbitrairement petits, la variation subie par $m(r, f)$ est aussi arbitrairement petite.

de cette inégalité la suivante :

$$(12)\quad m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{1}{M}\frac{f^{(k-1)}}{f}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k-1)}}{f}\right) + \overset{+}{\log}\frac{1}{M} + \Delta m \qquad \text{pour}\quad 0 < r \leqq R',$$

Δm désignant une quantité positive arbitrairement petite pour les δ_ν arbitrairement petits. Or, d'après la formule de Jensen, on a

$$(13)\qquad m(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|,$$

ce qui s'écrit

$$(14)\qquad m(r, f) < m\left(r, \frac{1}{f}\right) + p\log\frac{1}{d} + \log|f(0)|.$$

Donc en appliquant le lemme I à $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, on déduit de (12) et (14) une inégalité de la forme

$$(15)\quad V_0(r, f) < A_k\left(\log|f(0)| + p + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu'=0}^{n(r,0)}\log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + B_k\log\frac{1}{\rho - r} + C_k\overset{+}{\log}V_0(\rho, f)$$

et l'application du lemme A à cette inégalité donne de suite une inégalité de forme (10).

Supposons maintenant qu'il existe dans (D') au moins un point ζ_{k-1} pour lequel $|f^{(k-1)}(z)| < M$. En intégrant $f^{(k)}(z)$ le long d'une courbe qui joint ζ_{k-1} à un point quelconque z de (D'), nous trouvons comme antérieurement

$$|f^{(k-1)}(z)| < M + 2(\pi + 1) = M.$$

Alors on recommence le même raisonnement; en le répétant, on arrive soit à une inégalité de la forme (10), soit finalement à une inégalité qui est

$$|f'(z)| < M_{k-1},$$

$M_1, M_2, \ldots, M_k$ sont des valeurs numériques ne dépendant que de k. Enfin en intégrant $f'(x)$ le long d'un arc de courbe qui joint O à z, on obtient pour tous les points de (D')

$$|f(z)| < |f(0)| + M_k,$$

et par suite

$$(16)\qquad m(r, f) < \overset{+}{\log}|f(0)| + K,$$

K étant une constante numérique qui ne dépend que de k. Cette inégalité entre aussi dans (10).

Maintenant si l'hypothèse que l'on a faite au début n'a pas lieu, il existe alors dans (D') au moins un point z_1 pour lequel $|f^{(k)}(z)| \geqq 1$. Distinguons deux cas :

1° $z_1 = 0$. D'après la formule de Jensen, et le lemme I, on obtient

$$(17)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \mathrm{A}_k\left(\log|f(0)| + r + \log\frac{1}{r} + \sum_{\nu'=0}^{n(r,0)} \log\frac{1}{\delta_{\nu'}}\right) + \mathrm{B}_k \log\frac{1}{\rho - r} + \mathrm{C}_k \log \mathrm{V}_0(\rho, f);$$

2° $|z_1| > 0$. Appliquons l'inégalité (5) à la fonction $\frac{f^{(k)}}{f}$ pour le point z_1; il vient, en posant $r_1 = |z_1|$,

$$(18)\quad m\left(\mathrm{R}, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{4}{(\mathrm{R} - r_1)^2} m\left(\mathrm{R}, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{2}{\mathrm{R} - r_1}\left[\log|f(z_1)| + \sum_{\nu} \log\frac{2}{|z_1 - a_\nu|}\right]$$
$$[\nu = 1, \ldots, n(\mathrm{R}, 0)].$$

Pour éliminer z_1, on peut prendre une valeur $\mathrm{R}_0 > r_1$ suffisamment grande, telle que

$$\log|f(z_1)| < \frac{1}{1-\mathrm{R}} \log\frac{1}{1-\mathrm{R}} \qquad \text{pour} \quad \mathrm{R}_0 \leqq \mathrm{R} < 1,$$

et l'on porte cette borne dans (18). Mais il faut remarquer que R_0 dépend alors de f.

Maintenant, choisissons arbitrairement entre R' et 1 une valeur R'_0 qui ne dépend que de R', par exemple $\mathrm{R}'_0 = \mathrm{R}' + \frac{1 - \mathrm{R}'}{100}$ et posons $\mathrm{H} = \frac{1 - \mathrm{R}'_0}{\mathrm{R}'_0 - \mathrm{R}'}$; en prenant une valeur r_0 telle que $r_0 \geqq \mathrm{R}_0$ et $r_0 \geqq \mathrm{R}'_0$, on a alors

$$\rho - \mathrm{R} < \mathrm{H}(\mathrm{R} - r_1) \qquad \text{pour} \quad r_0 \leqq \mathrm{R} < \rho < 1$$

et l'on arrive à écrire (18) sous la forme (11) en changeant R en r.

Dans le cas où $k = 1$, l'élimination de z_1 peut s'effectuer sans introduire la valeur R_0. Supposons que z_1 soit le plus voisin de O parmi les points où $|f'(z)| \geqq 1$. Joignons de O à z_1 par un arc de courbe L pour tout point duquel $|f'(z)| \leqq 1$; en intégrant $f'(z)$ le long de L, on a l'inégalité

$$\overset{+}{\log}|f(z_1)| < \overset{+}{\log}|f(0)| + \text{const. numériq.}$$

Remarque. — 1° Dans le cas où f s'annule une infinité de fois, le lemme reste vrai avec les modifications indiquées dans la remarque sur le lemme I.

2° Si l'on fait $\delta_\nu = \delta$, l'inégalité (11) peut s'écrire

$$(11')\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}|f(0)| + \log\frac{1}{r} + n(r, 0)\log\frac{1}{\delta}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} \mathrm{V}_0(\rho, f)\right].$$

5. Dans les lemmes précédents nous avons considéré des cercles de rayons arbitrairement petits; pour le cas où la valeur initiale $f(0)$ peut intervenir sous la forme $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$, nous pouvons avoir des limitations plus précises sans

introduction de tels cercles. En ce qui concerne $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, nous établissons dans le cas plus général d'une fonction méromorphe une inégalité de même forme que celle de M. R. Nevanlinna relative à $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ par la méthode de récurrence ([8]) et nous avons l'énoncé :

Lemme I'. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, en supposant que la valeur $c_0 = f(0)$ soit finie et différente de zéro, on a*

$$(19)\qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < a_k + a'_k \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + b_k \log\frac{1}{r} + b'_k \log\frac{\rho}{r} + b''_k \log\frac{\rho}{\rho - r} + c_k \overset{+}{\log} T(\rho, f)$$

pour $0 < r < \rho < 1$. Les coefficients $a_k, \ldots, c_k$ sont des constantes numériques ne dépendant que de k.

Si $k = 1$, c'est le lemme dû à M. R. Nevanlinna; améliorée par Valiron et modifiée par M. Milloux, l'inégalité qui s'y trouve est mise sous la forme

$$(20)\qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 16 + 4 \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{\rho} + 2\log\frac{\rho}{r} + 3\log\frac{\rho}{\rho - r} + 4\overset{+}{\log} T(\rho, f).$$

Supposons que l'inégalité de forme

$$(21)\qquad m\left(r, \frac{f^{(p)}}{f}\right) < a_p + a'_p \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + b_p \log\frac{1}{r} + b'_p \log\frac{\rho}{r} + b''_p \log\frac{\rho}{\rho - r} + c_p \overset{+}{\log} T(\rho, f)$$

soit vraie pour $p = 1, 2, \ldots, k-1$; nous allons démontrer qu'elle est encore vraie pour $p = k$.

De la formule de Poisson-Jensen, il est facile de déduire

$$(22)\qquad \begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] = {} & \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{R}\,e^{i\varphi})| \frac{2\mathrm{R}\,e^{i\varphi}}{(\mathrm{R}\,e^{i\varphi} - z)^{k+1}}\,d\varphi \\ & + (k-1)! \sum_{|a_\nu| < \mathrm{R}} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{(z - a_\nu)^k} + \frac{\bar{a}_\nu^{k-1}}{(\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z)^k}\right] \\ & + (k-1)! \sum_{|b_\mu| < \mathrm{R}} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{(z - b_\mu)^k} + \frac{\bar{b}_\mu}{(\mathrm{R}^2 - \bar{b}_\nu z)^k}\right]. \end{aligned}$$

Considérons le premier crochet; son module est inférieur à

$$(23)\qquad \frac{2^k \mathrm{R}^{3k-1}(\mathrm{R}+1)}{|\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z|^{2k}} \left|\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z}{\mathrm{R}(z - a_\nu)}\right|^k < \frac{2^k \mathrm{R}^{k-1}(\mathrm{R}+1)}{(\mathrm{R} - r)^{2k}} \left|\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z}{\mathrm{R}(z - a_\nu)}\right|^k,$$

ou encore à $\frac{2^{k+1}}{(\mathrm{R} - r)^{2k}} \left|\frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z}{\mathrm{R}(z - a_\nu)}\right|$ en nous plaçant dans le cas où $\mathrm{R} < 1$. Et l'on a

---

([8]) M. Milloux a établi par une autre voie une inégalité de même nature.

une limitation analogue pour le second crochet. Par conséquent, en posant

$$V(r, f) = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

il vient

$$(24) \qquad \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] < k!\,\frac{2}{(R-r)^{k+1}}V(R, f) + \frac{2^{k+1}}{R(R-r)^{2k}}\left[\sum_{|a_\nu|<R}\left|\frac{R^2-\bar{a}_\nu z}{R(z-a_\nu)}\right|^k + \sum_{|b_\mu|<R}\left|\frac{R^2-\bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}\right|^k\right].$$

On voit qu'en désignant par Σ_1 et Σ_2 les deux sommes du crochet, le second membre est un polynome P en $\frac{1}{R}$, $\frac{R}{R-r}$, Σ_1, Σ_2 et V.

Maintenant, si l'on développe le premier membre de (24), on en déduit

$$(25) \qquad \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < \sum_{p=1}^{k-1}\log\left|\frac{f^{(p)}}{f}\right| + \overset{+}{\log}P + C_k,$$

C_k étant une constante numérique.

Or nous avons supposé que (21) soit vrai pour $p=1, \ldots, k-1$ et l'on a, d'après la forme de P,

$$\overset{+}{\log}P < A_k + B_k\log\frac{1}{R} + B'_k\log\frac{\rho}{r} + B''_k\log\frac{R}{R-r} + \overset{+}{\log}V(R, f) + \overset{+}{\log}\Sigma_1 + \overset{+}{\log}\Sigma_2.$$

Donc eu égard à $V(r, f) \leqq 2T(R, f) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right|$, on déduit de (25)

$$(26) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < \bar{a}_k + \bar{a}'_k\,\overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \bar{b}_k\log\frac{1}{R} + \bar{b}'_k\log\frac{R}{r} + \bar{b}''_k\log\frac{R}{R-r} + \overset{+}{\log}T(r, f) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_R(re^{i\theta}, f)\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_R\left(re^{i\theta}, \frac{1}{f}\right)d\theta + \overset{+}{\log}\left[n(R, f) + n\left(R, \frac{1}{f}\right)\right],$$

où $V_R(re^{i\theta}, f)$ et $V_R\left(re^{i\theta}, \frac{1}{f}\right)$ sont les deux fonctions harmoniques

$$V_R\left(re^{i\theta}, \frac{1}{f}\right) = \sum_{|a_\nu|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\nu z}{R(z-a_\nu)}\right| \quad \text{et} \quad V_R(re^{i\theta}, f) = \sum_{|b_\mu|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}\right|$$

considérées par M. R. Nevanlinna dans sa théorie. En utilisant la formule de Gauss, on trouve aisément que la somme des deux intégrales est égale à

$$N(R, f) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

On a ensuite à éliminer ces indices de densité et le dernier terme de (26).

En procédant comme M. R. Nevanlinna l'a fait dans son lemme et en posant $R - r = \dfrac{\rho - r}{2T(\rho) + \log\left|\dfrac{1}{c_0}\right| + 2}\,\dfrac{r}{\rho}$, on est conduit à la conclusion.

Remarque. — Dans le cas où $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan à distance finie, l'énoncé du lemme est tout à fait analogue et l'inégalité a la même forme, seulement au lieu de $\log\frac{1}{r}$, on a $\overset{+}{\log}\frac{1}{r}$.

Cas particulier. — Si la fonction est privée de zéros, en modifiant légèrement la démonstration, on peut mettre l'inégalité sous la forme suivante :

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)$$

qui est déjà connue [9].

6. Au moyen du lemme I′, on trouve le suivant analogue au lemme II, mais plus précis.

Lemme II′. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et l'on suppose $f(0) \neq 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0$. On désigne par $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ ses zéros; de chaque a_ν dont $|a_\nu| \leqq r$ comme centre, on décrit un cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ. En se donnant un cercle (C') de centre O et de rayon quelconque $R' (< 1)$, on a ou bien, pour $0 < r < R$,*

$$m(r, f) < H_k\left[N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \omega_0 + \log\frac{1}{r}\right] + K_k \log\frac{2}{1 - r}, \tag{27}$$

ou bien, il existe alors au moins un point z_1 où $|f^{(k)}(z)| \geqq 1$, et en prenant R_0 tel que $\log|f(z_1)| < \frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}$ pour $r \geqq R_0$, on a, pour $R' < r_0 \leqq r < \rho < 1$, avec $r_0 \geqq R_0$, l'inégalité

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) &< N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &+ \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\big(\omega_0 + \omega(r, n, \delta)\big) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right], \end{aligned} \tag{28}$$

où

$$\omega_0 = \overset{+}{\log}|c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| \quad \text{et} \quad \omega(r, n, \delta) = \log\frac{1}{r} + n(r, 0)\log\frac{1}{\delta}, \tag{29}$$

H_k, K_k, α_k, β_k et γ_k *étant des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de k et les trois dernières ne dépendent que de R' et R_0 à part k dans le cas général et seulement de R' dans le cas où $k = 1$.*

---

[9] *Voir* Valiron, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions* ... (*Act. Scient. et Ind.*, nº 570, 1937, p. 12).

Reprenons le raisonnement du lemme II. Supposons d'abord $|f^{(k)}(z)| < 1$ pour tout point z intérieur à (D'). Deux cas sont possibles :

1° On est conduit à une inégalité qui peut être mise sous la forme

$$(30)\qquad m(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f}\right) + A_k\left(\omega_0 + \log\frac{1}{r}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log}\, m(\rho, f).$$

Si l'on prend $A_k > 1$ et applique le lemme A à cette inégalité en posant

$$\omega(r) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \omega_0 + \log\frac{1}{r},$$

il vient

$$(31)\qquad m(r, f) < H_k\left[N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \omega_0 + \log\frac{1}{r}\right] + K_k \log\frac{2}{1 - r}.$$

2° On obtient finalement

$$m(r, f) < \overset{+}{\log}\,|c_0| + \text{const. numériq.},$$

inégalité qui entre dans (27).

Supposons ensuite que $|f^{(k)}(z_1)| \geqq 1$. Si $z_1 = 0$, la formule de Jensen donne

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|,$$

ce qui peut s'écrire, en vertu du lemme I',

$$(32)\qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f}\right) + A_k\left(\overset{+}{\log}\,|c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log}\, m(\rho, f).$$

Il est évident que cette inégalité entre dans (28).

Si $|z_1| > 0$, alors, on applique l'inégalité (5) à la fonction $\dfrac{f^{(k)}}{f}$ pour le point z_1 et l'on a

$$(33)\qquad m\left(R, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{4}{(R - r_1)^2}\, m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{2}{R - r_1}\left[\log|f(z_1)| + \sum_\nu \log\frac{2}{|z_1 - a_\nu|}\right]$$
$$[\nu = 1, \ldots, n(R, 0)].$$

Nous utilisons ici le lemme I' pour limiter le premier terme. Pour éliminer $f(z_1)$, on procède comme dans le lemme II, et nous majorons le dernier terme en écrivant

$$(34)\qquad \sum_{|a_\nu| < R} \log\left|\frac{2}{z_1 - a_\nu}\right| < n(R, 0)\log\frac{2}{\delta} < 2n(R, 0)\log\frac{1}{\delta} \qquad \text{dès que}\quad \delta < \frac{1}{2}.$$

Alors, en choisissant une valeur R_0 comme dans le lemme II, l'inégalité (34) prend la forme

$$(35)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\omega_0 + \omega(r, n, \delta)\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right],$$

on voit qu'elle entre dans (28).

Cas où f est privé de zéros. — Les inégalités (27) et (28) se réduisent respectivement à

$$(27')\qquad m(r, f) < \mathrm{H}_k\left(\overset{+}{\log}\,|c_0| + \log\frac{1}{r}\right) + \mathrm{H}_k \log\frac{2}{1 - r}$$

et

$$(28')\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\log|c_0| + \log\frac{1}{r}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log}\,\mathrm{V}(\rho, f)\right].$$

7. Pour l'étude du cas où intervient $f^{(k)}$, nous avons besoin encore de limiter $m\left(r, \dfrac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right)$. Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme III. — *Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et α un nombre. On suppose $f(0) \neq 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0, \alpha$; on désigne par $b_\mu (\mu = 1, 2, \ldots)$ les zéros de $f^{(k)} - \alpha$, par $n_k(r, \alpha)$ le nombre des b_μ dont $|b_\mu| \leqq r$, et par $n_k^\star(\mathrm{R}, \alpha)$ celui des b_μ dont $|b_\mu| < \mathrm{R}$; puis de chaque b_μ comme centre, on décrit un cercle (σ_μ) de rayon arbitrairement petit η. Alors en se donnant un cercle (C') de centre O et de rayon quelconque $\mathrm{R}' (< 1)$, on a ou bien, pour $0 < r < \mathrm{R}'$, l'inégalité*

$$(36)\qquad m(r, f) < \mathrm{H}_k\left[\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overset{+}{\log}\,|c_0| + \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right] + \mathrm{K}_k \log\frac{2}{1 - r},$$

ou bien, pour $\mathrm{R}' < r_0 \leqq r < \rho < 1$, l'inégalité

$$(37)\quad m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \mathrm{A}_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(r, n_k^\star, \eta)\right) + \mathrm{B}_k \log\frac{1}{\rho - r} + \mathrm{C}_k \overset{+}{\log} m(\rho, f),$$

avec $\mathrm{R} = \frac{1}{2}(r + \rho)$ et

$$(38)\qquad \omega_k(r, n_k^\star, \eta) = \log\frac{1}{r} + n_k^\star(\mathrm{R}, \alpha) \log\frac{1}{\eta},$$

où H_k, K_k, A_k, B_k et C_k sont des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de α et k, et les trois dernières ne dépendent que de α et R' à part k.

Appliquons la formule de Poisson-Jensen à la fonction $f^{(k)} - \alpha$; on trouve, par dérivation,

$$(39)\qquad \left|\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \alpha}\right| < \frac{2\mathrm{R}}{(\mathrm{R} - r)^2}\mathrm{V}(\mathrm{R}, f^{(k)} - \alpha) + \sum_{\mu=1}^{n_1(\mathrm{R}, 1)} \frac{\mathrm{R}^2 - |b_\mu|^2}{|z - b_\mu| . |\mathrm{R}^2 - \bar{b}_\mu z|}.$$

La sommation qui figure dans cette inégalité peut être divisée en deux : une σ s'étend aux b_μ dont $|b_\mu| \leqq r$ et l'autre σ' s'étend aux b_μ tel que $r < |b_\mu| < \mathrm{R}$. Si l'on exclut éventuellement de la circonférence (C_r) les points intérieurs à certain (σ_μ), on a

$$\sigma < \sum_{|b_\mu| \leqq R} \frac{R^2 - |b_\mu|^2}{|z - b_\mu| r(R - |b_\mu|)} < \frac{2}{r} n_k(r, \alpha) \frac{1}{\eta},$$

$$\sigma' < \sum_{r < |b_\mu| < r} \frac{R^2 - |b_\mu|^2}{|z - b_\mu|(R^2 - |\bar{b}_\mu|^2)} < \Delta_k(R, r) \frac{1}{\eta},$$

où l'on pose

$$\Delta_k(R, r) = n_k^*(R, \alpha) - n_k(r, \alpha).$$

L'inégalité (39) s'écrit alors

$$(40) \qquad \left| \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \alpha} \right| < P_k \left[\frac{1}{r}, n_k(r, \alpha) \frac{1}{\eta}, \Delta_k(R, r) \frac{1}{\eta}, \frac{1}{R - r}, V \right],$$

P_k étant un polynome des arguments qui figurent dans le crochet. Les coefficients de P_k sont numériques et ne dépendent que de k, et l'on déduit de cette inégalité

$$(41) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \alpha}\right) < A'_k \left[\log \frac{1}{r} + n_k^*(R, \alpha) \log \frac{1}{\eta} \right] + B'_k \log \frac{1}{R - r} + C'_k \overset{+}{\log} V(R, f^{(k)} - \alpha)$$

pour $0 < r < R < R'$.

Transformons le dernier terme. Considérons le domaine (D'') limité par (C'), (γ_ν) et (σ_μ) $[\nu = 1, \ldots, p;\ \mu = 1, \ldots, n_k(n, \alpha)]$ et supposons d'abord que pour tout point z intérieur à (D'') on ait $|f^{(k)} - \alpha| < 1$ et, par suite, $|f^{(k)}(z)| < |\alpha| + 1 = h_1$, h_1 étant un nombre positif qui dépend de α. Si l'on procède comme dans le lemme II en considérant la fonction $\frac{1}{h_1} f(z)$, on trouve une inégalité de forme (36) dont les coefficients dépendent ici de α à part k et d.

Dans le cas contraire, il existe au moins un point ζ_1 dans (D'') pour lequel $|f^{(k)}(\zeta_1) - \alpha| \geqq 1$. Distinguons encore deux cas :

1° $\zeta_1 = 0$. D'après la formule de Jensen, on a

$$(42) \qquad m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < m(R, f^{(k)} - \alpha) + \log \left| \frac{1}{f^{(k)}(0) - \alpha} \right| = m(R, f^{(k)} - \alpha),$$

par suite

$$V(R, f^{(k)} - \alpha) < 2m(R, f^{(k)} - \alpha) < 2m(R, f^{(k)}) + \overset{+}{\log} |\alpha| + 2 \log 2$$
$$< 2\left[m(R, f) + m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log |\alpha| + \log 2 \right].$$

En appliquant à $m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$ le lemme I', on trouve pour $r < R < \rho < 1$,

$$(43) \qquad V(R, f^{(k)} - \alpha) < 2\left[m(R, f) + A_k\left(\log \left| \frac{1}{f(0)} \right| + \log \frac{1}{R} \right) + B_k \log \frac{1}{\rho - R} + C_k \overset{+}{\log} m(\rho, f) \right],$$

A_k, B_k et C_k ne dépendent que de d et α à part k. En remplaçant $m(R, f)$ par $m(\rho, f)$ et en prenant les $\overset{+}{\log}$ des deux membres, puis en posant $\rho - R = \frac{1}{2}(\rho - r)$, il vient une inégalité de la forme

$$\overset{+}{\log} V(R, f^{(k)} - \alpha) < \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \overset{+}{\log}\log\frac{1}{r} + \overset{+}{\log}\log\frac{1}{\rho - r} + C'_k\,\overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\, m(\rho, f),$$

a fortiori

$$(44)\qquad \overset{+}{\log} V(R, f^{(k)} - \alpha) < \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r} + \log\frac{1}{\rho - r} + C'_k\,\overset{+}{\log}\, m(\rho, f).$$

En portant cette borne dans (41), on obtient une inégalité de la forme (37).

2° $|\zeta_1| = \rho_1 > 0$. En appliquant l'inégalité (5) à la fonction $f^{(k)} - \alpha$ pour le point ζ_1, on obtient

$$m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \frac{4}{(R - \rho_1)^2}\, m(R, f^{(k)} - \alpha),$$

ce qui peut s'écrire

$$m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \frac{4}{(R - R')^2}\left[m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(R, f) + \overset{+}{\log}|\alpha| + \log 2\right].$$

Appliquons le lemme I' au premier terme du crochet et prenons entre R' et 1 une valeur r_0 ne dépendant que de R'; en posant $H = \frac{1 - r_0}{r_0 - R'}$, il vient, pour $R' < r_0 \leqq R < \rho < 1$,

$$(45)\quad m\left(R, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) < \frac{1}{(\rho - R)^2}\left[\alpha_k\left(\log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{R}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - R} + \gamma_k\,\overset{+}{\log}\, m(\rho, f)\right],$$

α_k, β_k, γ_k ne dépendant que de R' et α à part k.

D'autre part, on a

$$(46)\qquad m(R, f^{(k)} - \alpha) < m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(R, f) + \overset{+}{\log}|\alpha| + \log 2.$$

De (45) et (46), on déduit aisément

$$V(R, f^{(k)} - \alpha) < m(R, f) + A'_k\left(\log\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \log\frac{1}{R}\right) + B'_k \log\frac{1}{\rho - R} + C'_k\,\overset{+}{\log}\, V(\rho, f).$$

Cette inégalité nous conduira comme (43) à une inégalité de forme (37) et le lemme se trouve démontré.

8. Établissons maintenant le lemme :

Lemme IV. — *Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et α un* *nombre. On suppose que* $f(0)=c_0\neq 0$ *et* $f^{(k)}(0)=c_k\neq\alpha$. *On conserve les hypothèses et les notations du lemme précédent. En se donnant un cercle* (C′) *de centre* O *et de rayon* R′, *on a ou bien* pour $0<r<\mathrm{R}'$, l'inégalité

$$(47)\qquad m(r,f)<\mathrm{H}_k\left[\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overset{+}{\log}|c_0|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\log\frac{1}{r}\right]+\mathrm{K}_k\log\frac{2}{1-r}$$

ou bien, pour $\mathrm{R}'<r_0\leqq r<\rho<1$, *l'inégalité*

$$(48)\quad m\left(r,\frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right)<\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right)+\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\omega_k(r,n_k^\star,\eta)\right)+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\overset{+}{\log}m(\rho,f)\right],$$

où

$$(49)\qquad \omega_k(r,n_k^\star,\eta)=\log\frac{1}{r}+n_k^\star(\mathrm{R},\alpha)\log\frac{1}{\eta},\qquad \text{avec}\quad \mathrm{R}=\frac{1}{2}(r+\rho);$$

H_k, K_k, α_k, β_k *et* γ_k *sont des constantes numériques dont les deux premières ne dépendent que de* α *et* k *et les trois dernières ne dépendent que de* α *et* R′ *à part* k.

Désignons par (D″) le domaine limité par (C′) et les circonférences (γ_ν) et (σ_μ) dont les centres se trouvent dans (C′). Supposons d'abord que $\left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-\alpha}\right|<1$ quel que soit le point z dans (D″). Considérons $f^{(k)}(z)-\alpha$ et distinguons deux cas :

1° $|f^{(k)}(z)-\alpha|\geqq|\alpha|+1$ quel que soit z dans (D″). On a alors $|f^{(k)}(z)|>1$ quel que soit z dans (D″) et l'on démontre comme au début de la démonstration du lemme II que pour $0<r<\mathrm{R}'$, on a une inégalité de forme (47).

2° Il existe dans (D″) une valeur ζ_1 telle que

$$|f^{(k)}(\zeta_1)-\alpha|<|\alpha|+1=h_1.$$

En intégrant la fraction $\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}$, le long d'un arc de courbe L qui joint du point ζ_1 à un point quelconque z et qui est située dans (D″), on trouve

$$\log\left|\frac{f^{(k)}(z)-\alpha}{f^{(k)}(\zeta_1)-\alpha}\right|<1+2(\pi+1)<10,$$

ce qui donne

$$(50)\qquad |f^{(k)}(z)|<|\alpha|+h_1e^{10}$$

pour tout point z de (D″). Alors le raisonnement que l'on a fait dans la première partie de la démonstration du lemme II conduira encore à une inégalité de forme (47), dont les coefficients numériques H_k, K_k dépendent de α à part k.

Maintenant, si l'hypothèse que l'on a fait au début n'a pas lieu, il existe alors dans (D'') une valeur z_1 pour laquelle on a $\left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-\alpha}\right| \geqq 1$. Il y a deux cas à distinguer :

1° $z_1 = 0$. En vertu de la formule de Jensen, on obtient

$$m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < m\left(R, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}\right) + N\left(R, \frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right)$$

et en appliquant le lemme précédent, il vient

$$(51) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right) + A_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(r, n_k^\star, \eta)\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} m(\rho, f);$$

2° $|z_1| > 0$. En appliquant l'inégalité (5) à la fonction $\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-\alpha}$ pour le point z_1, et en posant $|z_1| = r_1$, il vient

$$(52) \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{4}{(R-r_1)^2} m\left(R, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-\alpha}\right) + \frac{2}{R-r_1}\sum_{\mu} \log\frac{2}{|z_1 - b_\mu|} \qquad [\mu = 1, \ldots, n_k^\star(R, \alpha)].$$

Appliquons le lemme III à la valeur moyenne logarithmique qui figure au second membre et comme dans ce lemme, choisissons entre R' et 1 une valeur r_0 qui ne dépend de R'. En posant $H = \frac{1-r_0}{r_0 - R'}$, nous avons alors ou bien pour $0 < r < R'$ une inégalité de forme (47), ou bien, pour $R' < r_0 \leqq R < \rho < 1$, l'inégalité

$$(53) \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{4H^2}{(\rho - R)^2}\left[A_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(R, n_k^\star, \eta)\right) + B_k \log\frac{1}{\rho - R} + C_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right] + \frac{2H}{\rho - R} n_k^\star(R, \alpha)\log\frac{2}{\eta},$$

où

$$\omega_k = \log\frac{1}{R} + n_k^\star(\rho', \alpha)\log\frac{1}{\eta}, \qquad \text{avec} \quad \rho' = \frac{1}{2}(R+\rho).$$

Il est évident que (53) peut s'écrire

$$(54) \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}-\alpha}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{1}{(\rho - R)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_k(R, n_k^\star, \eta)\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - R} + \gamma_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right],$$

α_k, β_k, γ_k dépendant de α et R' à part k.

En changeant R en r, on voit que les inégalités (51) et (54) entrent toutes les deux dans (48).

CHAPITRE II.

Valeurs exceptionnelles B d'une fonction méromorphe. Propositions sur la croissance d'une fonction.

I. — Définition et propriétés asymptotiques.

9. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre quelconque définie dans le cercle unité; convenons d'appeler *valeur exceptionnelle d'ordre zéro au sens de Borel ou valeur exceptionnelle* B *relative à* f une valeur α telle que

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{N(r, \alpha)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \tau, \tag{55}$$

τ étant un nombre fini.

Considérons une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité et supposons qu'elle admette $p \geqq 3$ valeurs exceptionnelles B. Prenons trois de ces valeurs $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$; et leur appliquons le second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna.

$$T(r, f) < \sum_{i=1} N(r, \alpha_i) + S(r). \tag{56}$$

D'après la définition, étant donné trois nombres positifs $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$, on peut trouver une valeur r_0 telle que pour $r \geqq r_0$, on ait

$$N(r, \alpha_i) < (\tau_i + \varepsilon_i) \log \frac{1}{1-r} \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{57}$$

il vient donc pour $r \geqq r_0$,

$$T(r, f) < \sum_{i}^{3} (\tau_i + \varepsilon_i) \log \frac{1}{1-r} + S(r), \tag{58}$$

ce qui s'écrit, en choisissant les ε_i tels que $\sum \varepsilon_i \leqq 1$,

$$T(r, f) < C + \left(\sum \tau_i + 7\right) \log \frac{1}{\rho - r} + 8 \overset{+}{\log}\, T(\rho, f) \qquad (r_0 \leqq r < \rho < 1). \tag{59}$$

En procédant comme M. R. Nevanlinna l'a fait pour une inégalité concernant la théorie des défauts ([3]) on arrive à une inégalité permettant d'énoncer la proposition : *Si une fonction méromorphe dans le cercle unité admet* $p \geqq 3$ *valeurs exceptionnelles* B, *on a*

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \sum_{i=1}^{3} \tau_i + 7. \tag{60}$$

En vertu de ce résultat, $T(r, f) \leqq O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$. Si donc une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité est telle que le rapport $T(r, f) : \log \frac{1}{1-r}$ croît indéfiniment pour $r \to 1$, c'est-à-dire telle que le théorème analogue à celui de Picard-Borel s'applique, elle ne pourra pas admettre plus de deux valeurs exceptionnelles définies ci-dessus, ce qui justifie la dénomination.

10. Soit maintenant $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité et supposons qu'elle admette o et $+\infty$ comme valeurs exceptionnelles B et que sa dérivée $f^{(k)}(z)$ admette 1 comme valeur de la même nature. Prenons le théorème fondamental de M. Milloux avec l'inégalité [10]

$$T(r, f) < (k+1)\,N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) + S(r) \tag{61}$$

dont le premier coefficient du second membre peut se réduire à k [11] et

$$S(r) = a_k \overset{+}{\log}\, T(\rho, f) + b_k \log \frac{1}{\rho - r} + C \qquad \text{pour} \quad r_0 < r < \rho < 1,$$

a_k et b_k étant des constantes numériques qui dépendent seulement de k et C, une constante qui peut dépendre des valeurs initiales $f(0)$, $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k+1)}(0)$. D'après l'hypothèse, on a

$$N(r, f) < (\tau_\infty + \varepsilon_1) \log \frac{1}{1-r}, \qquad N\left(r, \frac{1}{f}\right) < (\tau_0 + \varepsilon_2) \log \frac{1}{1-r}$$

et

$$N\left(r, \frac{1}{\rho^{(k)}-1}\right) < (\tau_1 + \varepsilon_3) \log \frac{1}{1-r}.$$

En choisissant les ε_i tels que $k\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 1$, l'inégalité (61) devient

$$T(r, f) < C + (b_k + k\tau_\infty + \tau_0 + \tau_1 + 1) \log \frac{1}{\rho - r} + a_k \overset{+}{\log}\, T(\rho, f) \qquad (r \geqq r'_0) \tag{62}$$

et le procédé de M. R. Nevanlinna conduit à l'inégalité

$$\overline{\lim}\, \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq b_k + k\tau_\infty + \tau_0 + \tau_1. \tag{63}$$

Donc *si une fonction méromorphe dans le cercle unité admet* ∞ *et* o *comme valeurs exceptionnelles* B *et si sa dérivée d'ordre* k *admet* 1 *comme valeur de la même nature, on a l'inégalité* (63).

---

[10] MILLOUX, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées* (*Act. Scient. et Ind.*, n° 888, fasc. XIV, 1940, p. 21).

[11] HIONG, *Généralisations du théorème fondamental de Nevanlinna-Milloux* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, fasc. LLXXVIII, 1954, p. 181).

Au lieu du théorème fondamental de M. Milloux, si l'on utilise celui que nous avons établi ([11]), on pourra obtenir un résultat plus général. On définit des fonctions exceptionnelles B d'une façon analogue à celle dont on a défini les valeurs exceptionnelles B, on trouve alors une inégalité analogue à (63) pour le cas très général où à la place des valeurs exceptionnelles, o pour f et 1 pour $f^{(k)}$, on considère une fonction exceptionnelle φ pour f et une fonction exceptionnelle ψ pour $f^{(k)}$. En particulier, on trouve une inégalité analogue à (63) pour le cas où l'on remplace les valeurs o et 1 par deux valeurs quelconques a et b $(b \neq 0)$.

II. — Limitation du module d'une fonction holomorphe.

11. Maintenant considérons une fonction holomorphe dans le cercle unité qui admet une valeur exceptionnelle B ou dont la dérivée admet une telle valeur, et cherchons pour son module une limitation qui sera valable pour tout le cercle $|z| \leqq r$. Nous pouvons d'abord énoncer le théorème suivant :

Théorème A. — *Soit une fonction holomorphe définie par*

$$f(z) = c_0 + c_h z^h + \ldots \qquad (c_0,\ c_h \neq 0) \tag{64}$$

dans le cercle unité; on suppose qu'elle ne s'y annule que p fois et y admet 1 *comme valeur exceptionnelle* B *de sorte que l'on ait* $N(r, 1) \leqq (\tau + \varepsilon) \log \frac{1}{1-r}$ *pour* $r \geqq r_0$. *On désigne par* a_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ *ses zéros; soit d un nombre positif tel que* $d \leqq |a_1|$; *et l'on décrit de chaque* a_ν *comme centre un cercle* (γ_ν) *de rayon arbitrairement petit* δ. *Alors en supposant* $c_0 \neq 1$ *et en se donnant un cercle* (C') *de centre* O *et de rayon* $R' (< 1)$ *aussi voisin de* 1 *que l'on veut, on a pour tout point z du cercle* $|z| \leqq r$ *avec* $0 < r < R'$, *l'inégalité*

$$\log|f(z)| < \frac{1}{(R'-r)^3}\left[H\big(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta)\big) + K \log \frac{2}{R'-r}\right], \tag{65}$$

avec

$$\Omega_0 = \overset{+}{\log}|c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0 - 1}\right|, \qquad \omega = \log\frac{1}{r} + p \log\frac{1}{d} + p \log\frac{1}{\delta}, \tag{66}$$

H *et* K *étant deux constantes numériques qui ne dépendent que de* τ *et* r_0 *et* R'.

Pour le démontrer, on peut partir de l'inégalité utilisée antérieurement ([12])

$$m(r, f) < N(r, 1) + Q(r), \tag{67}$$

avec

$$Q(r) = m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \big|\log|c_0 - 1|\big| + 8 \log 2.$$

([12]) *Voir* le Mémoire cité dans l'introduction.

Majorons le second membre de (67). Pour $N(r, 1)$, on a en prenant $\varepsilon < 1$,

$$(68) \qquad N(r, 1) < (\tau + 1)\log\frac{1}{1-r} < (\tau+1)\log\frac{1}{\rho - r} \qquad \text{pour} \quad r_0 < r < \rho.$$

Pour le premier terme de $Q(r)$, nous cherchons une limitation au moyen du lemme II'. Comme

$$(69) \qquad N(r, 0) < n(r, 0)\log\frac{r}{d} < p\log\frac{1}{d},$$

on a pour la première alternative l'inégalité

$$(70) \qquad m(r, f) < H_1\left(\omega_0 + p\log\frac{1}{d} + \log\frac{1}{r}\right) + K_1\log\frac{2}{1-r} \qquad (0 < r < R'),$$

et pour la seconde, l'inégalité

$$(71) \qquad m\left(r, \frac{f}{f'}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1\big(\omega_0 + \omega(r, p, \delta)\big) + \beta_1\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]$$

valable pour $R' < r'_0 \leqq r < \rho < 1$. Les coefficients numériques α_1, β_1 et γ_1 ne dépendent que de R'.

Quant aux deux termes suivants, on peut les majorer avec le lemme de M. R. Nevanlinna.

Si l'on porte toutes ces bornes dans (67) en considérant la seconde alternative pour le premier terme de $Q(r)$, il vient une inégalité de la forme

$$(72) \qquad m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1\big(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta)\big) + \beta_1\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]$$

valable pour $r \geqq r'_0$ si l'on prend $r'_0 \geqq r_0$.

En appliquant à cette inégalité le lemme B, il vient

$$m(r, f) < \frac{1}{(1-r)^2}\left[H'\big(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta)\big) + K'\log\frac{2}{1-r}\right].$$

Cette inégalité établie pour $r \geqq r'_0$ restera valable pour $0 < r < r'_0$ si l'on majore éventuellement les coefficients numériques H' et K'. Seulement les nouveaux coefficients peuvent dépendre de r'_0, c'est-à-dire de R' et de r_0.

En particulier, on a

$$m(r, f) < \frac{1}{(R' - r)^2}\left[H'\big(\Omega_0 + \omega(r, p, d, \delta)\big) + K'\log\frac{2}{R' - r}\right],$$

inégalité dans laquelle entre aussi (70) que nous avons laissé.

Alors l'application de l'inégalité connue

$$(73) \qquad \log M(r, f) < \frac{R + r}{R - r} m(R, f) \qquad (r < R < 1)$$

relative au module maximum permet d'achever la démonstration.

12. Traitons maintenant le cas où une dérivée de la fonction f joue en même temps un rôle que f. Nous allons établir le théorème :

THÉORÈME B. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité*

$$f(z) = c_0 + \ldots + c_k z^k + \ldots \qquad (c_0,\ c_k \neq 0); \tag{74}$$

on suppose qu'elle ne s'y annule que p *fois et que sa dérivée d'ordre* k *y admette* 1 *comme valeur exceptionnelle* B *de sorte que l'on ait*

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) < (\tau_1 + \varepsilon_1) \log \frac{1}{1 - r} \qquad \text{pour} \quad r \geqq r_0. \tag{75}$$

On désigne par $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ les zéros de f; par $b_\mu (\mu = 1, 2, \ldots)$ les points 1 *de $f^{(k)}$, par $n_k(r, 1)$ le nombre des b_μ compris dans le cercle $|z| \leqq r$; soit alors un nombre positif $d \leqq |a_1|$ et de chaque b_μ dont $|b_\mu| \leqq r$ comme centre, on décrit un cercle (σ_μ) de rayon arbitrairement petit η; enfin on se donne un cercle* (C'), *de centre* O *et de rayon* R' (< 1) *aussi voisin de* 1 *que l'on veut. Alors en supposant $c_k \neq 1$, on a, pour tout point du cercle $|z| \leqq r$ avec $0 < r < R'$, l'inégalité*

$$\log |f(z)| < \frac{1}{(R' - r)^2} \left[H_k \left(\omega'_0 + \log \frac{1}{r} + p \log \frac{1}{d} + n_k(r', 1) \log \frac{1}{\eta} \right) + K_k \log \frac{2}{R' - r} \right], \tag{76}$$

où

$$\omega'_0 = \overset{+}{\log} |c_0| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{c_0} \right| + 1 \qquad \text{et} \qquad r' = \frac{1}{4} \left[r + \frac{3}{2} (R' + 1) \right] \quad [13], \tag{77}$$

H_k *et* K_k *étant des constantes numériques ne dépendant que de* τ, r_0 *et* R' *à part* k.

Prenons l'identité de M. Bureau

$$\frac{1}{f} = \frac{f^{(k)}}{f} - \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}} \frac{f^{(k+1)}}{f}. \tag{78}$$

En vertu des propriétés des valeurs moyennes logarithmiques, on peut en déduire

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + \log 2. \tag{79}$$

D'autre part, la formule de Jensen donne

$$m(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log |f(0)|;$$

il en résulte donc que

$$\begin{aligned} m(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f}\right) &+ m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) \\ &+ m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right) + \log |f(0)| + \log 2. \end{aligned} \tag{80}$$

---

[13] On peut prendre aussi $r' = \dfrac{R' + 1}{2}$ comme dans la Note citée [3].

Cherchons une limitation pour le second membre de (80). L'inégalité (69) peut déjà fournir une borne pour le premier terme. Pour les deux termes suivants, nous les majorons au moyen du lemme I' et nous avons les inégalités

$$(81)\quad m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) < A_i\left(\log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + B_i \log\frac{1}{\rho - r} + C_i \overset{+}{\log} m(\rho, f) \qquad (i = k,\ k+1).$$

Quant au quatrième terme, nous lui appliquons le lemme IV. Pour la seconde alternative, en remarquant qu'ici

$$(82)\qquad \omega_k = \log\frac{1}{r} + n_k^\star(R, 1)\log\frac{1}{\eta}, \qquad \text{avec}\quad R = \frac{1}{2}(r + \rho),$$

on a l'inégalité

$$(83)\quad m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) + \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r} + n_k^\star(R, 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + \beta'_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]$$

valable pour $R' < r'_0 \leqq r < \rho < 1$,

En vertu de l'hypothèse, on a en prenant $\varepsilon_1 \leqq 1$.

$$(84)\quad N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) < (\tau_1 + 1)\log\frac{1}{1 - r} < (\tau_1 + 1)\log\frac{1}{\rho - r} \qquad \text{pour}\quad r \geqq r_0.$$

Alors en choisissant $r'_0 \geqq r_0$, on peut écrire, pour $r \geqq r'_0$,

$$(85)\quad m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r} + n_k^\star(R, 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + \beta''_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right].$$

Portons dans (80) la borne donnée par (85) et celles données par (69) et (81); il vient alors une inégalité de la forme

$$(86)\quad m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k\left(\omega_0 + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k^\star(R, 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]$$

valable pour $r \geqq r'_0$. Les coefficients numériques α_k, β_k, γ_k ne dépendent que de τ_1 et R' à part k.

Maintenant soit $R'' = R' + \frac{1 - R'}{2}$ une valeur comprise entre R' et 1, et supposons $r'_0 \leqq r < \rho < R''$. Après avoir remplacé R par $\frac{1}{2}(r + R'')$, appliquons à l'inégalité (86) le lemme B avec la remarque. En posant $r' = \frac{1}{4}(r + 3R'')$ et eu égard à ce que $\log\frac{1}{r}$ est décroissant et $n_k^\star(r, 1)$, croissant, on obtient ainsi

$$(87)\quad m(r, f) < \frac{1}{(R'' - r)^2}\left[H_k\left(\omega'_0 + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k^\star(r', 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + K_k \log\frac{2}{R'' - r}\right].$$

Cette inégalité établie pour $r \geqq r'_0$ reste valable pour $r < r'_0$ si l'on majore éventuellement les coefficients H_k et K_k; mais les nouveaux coefficients peuvent dépendre de r'_0, c'est-à-dire de R' et de r_0.

Après la majoration éventuelle des coefficients, l'inégalité précédente est donc valable en particulier pour $0 < r < R'$. En remplaçant $R'' - r$ par $R' - r$, elle peut s'écrire *a fortiori*

$$(88) \quad m(r, f) < \frac{1}{(R'-r)^2}\left[H_k\left(\omega'_0 + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k(r', 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + K_k \log\frac{1}{R'-r}\right],$$

où r' est la valeur (77).

Maintenant considérons l'inégalité que donne la première alternative du lemme IV appliqué au quatrième terme de (80). En tenant compte de (77), on voit qu'elle entre dans (88) pour $0 < r < R'$.

L'inégalité (73) nous conduit alors immédiatement à la conclusion.

13. Dans le cas d'une fonction privée de zéros, on peut trouver, en modifiant la démonstration, une limitation dans laquelle la valeur initiale c_0 n'intervient que sous la forme $\overset{+}{\log}|c_0|$ et l'on a l'énoncé suivant :

Théorème B_0. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie par* (74) *dans le cercle unité avec $c_k \neq 1$; on suppose qu'elle ne s'annule pas et que sa dérivée d'ordre k admette* 1 *comme valeur exceptionnelle* B *de sorte que la condition* (75) *soit vérifiée. En conservant les notations du théorème précédent, on a pour tout point z du cercle $|z| \leqq r$ avec $0 < r < R'$, l'inégalité*

$$(89) \quad \log|f(z)| < \frac{1}{(R'-r)^3}\left[H_k\left(\overset{+}{\log}|c_0| + \log\frac{1}{r} + n_k(r', 1)\log\frac{1}{\eta} + 1\right) + K_k\log\frac{2}{R'-r}\right];$$

r', H_k et K_k ont la même signification que dans le théorème B.

Pour la démonstration, nous procédons d'une façon analogue à celle dont Valiron a démontré le théorème de M. Miranda ([14]).

Posons $V(r, f) = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right)$; de l'inégalité (80) et de la formule de Jensen, nous déduisons

$$(90) \quad V(r, f) < 2m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right) + \log|f(0)| + 2\log 2.$$

D'après ce que nous avons dit dans le lemme I' à propos d'un cas particulier, on a ici

$$(91) \quad m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) < A_k + B_k\log\frac{1}{\rho - r} + C_k\overset{+}{\log}V(\rho, f) \qquad (i = k, k+1).$$

([14]) Valiron, *loc. cit.*

Il nous suffit donc de trouver une majorante pour le quatrième terme du second membre de (90). Pour cela, appliquons le lemme IV, on a ou bien, pour $0 < r < R'$,

$$m(r, f) < H_k^0 \left(\overset{+}{\log} |c_0| + \log \frac{1}{r}\right) + K_k^0 \log \frac{2}{1-r},$$

ou bien pour $R' < r_0 \leqq r < \rho < 1$,

$$(92) \quad m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) + \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k \left(\log \frac{1}{r} + n_k^\star(R, 1) \log \frac{1}{\eta}\right) + \beta'_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right].$$

En vertu de l'hypothèse et supposant que $\varepsilon_1 \leqq 1$, on a

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) < (\tau_1 + 1) \log \frac{1}{1-r} < (\tau_1 + 1) \log \frac{1}{\rho - r}$$

pour $r \geqq r_0$. Par conséquent, l'inégalité (92) s'écrit

$$(93) \quad m\left(r, \frac{f^{(k)} - 1}{f^{(k+1)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k \left(\log \frac{1}{r} + n_k^\star(R, 1) \log \frac{1}{\eta}\right) + \beta''_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

α'_k, β'_k, γ'_k dépendent de τ_1, r_0 et R' à part k.

En portant dans (90) les majorantes données par (91) et (92), on obtient

$$(94) \quad V(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \left(\overset{+}{\log} |c_0| + \log \frac{1}{r} + n_k^\star(R, 1) \log \frac{1}{\eta}\right) + \beta_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right].$$

La démonstration se poursuit alors comme dans le théorème précédent.

CHAPITRE III.

Familles de fonctions holomorphes.

14. En nous appuyant sur les théorèmes du chapitre précédent, nous allons établir des critères de normalité ou de quasi-normalité pour des familles de fonctions holomorphes.

Nous commençons par donner une définition. Soit (f) une famille de fonctions méromorphes d'ordre quelconque $f(x)$; nous convenons d'appeler valeur *également* exceptionnelle B ou d'ordre zéro au sens de Borel une valeur α telle que

$$\varliminf_{r \to 1} \frac{N\left(r, \frac{1}{f - \alpha}\right)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \tau,$$

τ étant un nombre fini et de plus qu'étant donné un nombre positif ε, on puisse trouver une valeur r_0 pour que l'inégalité $r \geqq r_0$ entraîne l'inégalité

$$N\left(r, \frac{1}{f-\alpha}\right) < (\tau+\varepsilon)\log\frac{1}{1-r}, \tag{95}$$

quel que soit $f \in (f)$. Nous dirons aussi que les fonctions f de la famille admettent *également* (ou la famille admet *également*) α comme valeur exceptionnelle **B** ou d'ordre zéro de Borel.

15. Dans la suite nous désignerons toujours par (C_r) le cercle $|z| \leqq r$ et par (C') celui de $|z| < R'(<1)$ et pour plus de clarté, par $n(r, \alpha, f)$ le nombre des points α de la fonction f compris dans le cercle $|z| \leqq r$.

Le théorème A fournit des critères analogues à tous ceux que nous avons obtenus antérieurement pour le cas des valeurs exceptionnelles au sens de Picard-Borel, par exemple on a le suivant :

Théorème I. — *Soit une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes définie par un développement de la forme* (64) *dans le cercle unité, dont les valeurs à l'origine sont en module bornées supérieurement; si elles s'y annulent chacune p fois au plus et y admettent également* 1 *comme valeur exceptionnelle* B, *de plus si les $n(r, 1, f)$ sont bornés par un nombre $\bar{n}_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité pourvu que $c_0 \neq 1$ et $|a_1| > d > 0$.*

16. En nous appuyant maintenant sur les théorèmes B_0 et B, nous allons établir d'autres critères.

Théorème II. — *Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité ayant* (74) *pour développement. Si elles ne s'y annulent pas, si leurs dérivées d'ordre k y admettent également* 1 *comme valeur exceptionnelle* B *et si les $n(r, 1, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $\bar{n}_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que $|c_k| \neq 1$.*

Considérons le cercle (C_r). De toute suite infinie $f_n(z)$ de (f), je dis que l'on peut toujours en extraire une suite partielle uniformément convergente dans ce cercle. En effet, distinguons trois cas :

1° Les valeurs $f_n(0)$ ont en module une limite $\gamma_0 \neq 0, \infty$. Alors on peut en extraire une suite infinie $f_{\alpha_n}(0)$ convergeant vers γ_0. Considérons la suite $f_{\alpha_n}(z)$ et appliquons le théorème B_0 à la fonction $f_{\alpha_n}(z)$; il vient, pour $0 < r < R'$,

$$\log|f_{\alpha_n}(z)| < \frac{1}{(R'-r)^3}\left[H_k\left(\overset{+}{\log}|f_{\alpha_n}(0)| + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k(r', 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + K_k\log\frac{2}{R'-r}\right], \tag{96}$$

où

$$r' = \frac{1}{4}\left[r + \frac{3}{2}(R'+1)\right].$$

Cette inégalité est valable pour tout point du cercle (C_r).

Par le choix de la suite $f_{\alpha_n}(0)$ on peut supposer que les $\overset{+}{\log}|f_{\alpha_n}(0)|$ soient bornés par un nombre fini A_0 et comme η on peut prendre une même quantité pour toutes les fonctions de la suite $f_{\alpha_n}(z)$. Et puis en vertu de la définition de la valeur également exceptionnelle on constate que les coefficients H et K sont les mêmes pour toutes ces fonctions aussi. L'inégalité (96) montre alors que les fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans (C_r). On peut donc conclure que la suite $f_{\alpha_n}(z)$ est normale dans (C_r) et y engendre une suite uniformément convergente.

2° Les $f_{\alpha_n}(0)$ n'ont en module qu'une limite infinie. Alors on peut en extraire une suite $f_{\lambda_n}(0)$ qui croît indéfiniment en module. Considérons les fonctions $f_{\lambda_n}(z)$ et posons $g(z) = \frac{1}{f(z)}\cdot$ En observant que les $g(z)$ sont holomorphes dans (C_r) et en posant $f(z) = f(0) + \varphi(z)$, l'inégalité

$$|g(z)| < \frac{1}{|f(0)| - M(r, \varphi)}$$

montre que la suite $g_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers zéro dans (C_r). Donc la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers l'infini dans (C_r).

3° Les $f_n(0)$ n'ont qu'une limite zéro. On peut en extraire une suite $f_{\mu_n}(0)$ convergeant vers zéro et l'on démontre comme dans le cas précédent que la suite $f_{\mu_n}(z)$ converge uniformément vers zéro dans (C_r).

En résumé, on peut conclure que la famille (f) est normale dans (C_r), par suite dans (C'), puisque r peut être aussi voisin de R' que l'on veut. Puis pour R' suffisamment près de 1, tout cercle intérieur au cercle unité se trouvera contenu dans (C') sauf au plus les points de son contour qui peuvent se coïncider entièrement ou partiellement avec ceux de la circonférence (C'). Donc la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité; on peut dire aussi d'une façon abrégée qu'elle est normale dans l'intérieur du cercle unité.

Théorème III. — *Soit (f) une famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité qui a* (74) *pour développement et dont les valeurs à l'origine sont bornées supérieurement. Si les fonctions ne s'annulent que p fois au plus et si leurs dérivées d'ordre k admettent également* 1 *comme valeur exceptionnelle* B*; et si les nombres $n(r, 1, f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $\overline{n}_k(r, 1)$ ne dépendant que de r, alors la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que $c_k \neq 1$ et que pour les zéros a_1 des fonctions de la famille, on ait $|a_1| > d > 0$.*

Donnons-nous arbitrairement une suite infinie $f_n(z)$ des fonctions de la famille (f). En vertu d'un résultat de M. P. Montel que nous avons mis sous forme d'un lemme [1], de la suite $f_n(z)$, on peut extraire une suite partielle $f_{\alpha_n}(z)$ et obtenir dans (C_r) au plus p points $A_i (i = 1, \ldots, p)$ tels qu'en traçant de chaque A_i comme centre un cercle (ω_i) de rayon arbitrairement petit ε_i, chaque $f_{\alpha_n}(z)$ ait un zéro au plus dans un (ω_i) et n'en ait aucun à l'extérieur des (ω_i).

Maintenant considérons un cercle (ω_i) et les zéros $a_{\alpha_n, i}$ des fonctions f_{α_n}, qui sont intérieurs à ce cercle (ω_i). De chaque $a_{\alpha_n, i}$ comme centre, traçons un petit cercle $(\gamma_{\alpha_n, i})$ de rayon $\delta_{\alpha_n, i}$ contenant (ω_i); puis de centre A_i et de rayon $\bar{\varepsilon}_i$ traçons une petite circonférence $(\bar{\omega}_i)$ enveloppant tous les $(\gamma_{\alpha_n, i})$ dont les centres se trouvent dans le même cercle (ω_i).

Désignons par $(\bar{D})$ le domaine limité par (C_r) et les $(\bar{\omega}_i)$.

D'après l'hypothèse, les $f_{\beta_n}(0)$ ne peuvent pas avoir l'infini comme limite et nous n'avons que deux cas à examiner.

1° Les $f_{\beta_n}(0)$ ont une limite $\gamma_0 \neq 0$. On en extrait une suite infinie $f_{\lambda_n}(0)$ tendant vers γ_0 et l'on considère la suite $f_{\lambda_n}(z)$.

De chaque point 1 de la fonction $f_{\lambda_n}^{(k)}(z)$ comme centre, traçons un cercle (σ_{λ_n}) de rayon arbitrairement petit η.

Appliquons à $f_{\lambda_n}(z)$ le théorème B; on a, en posant $r' = \frac{1}{5}(4R' + r)$,

$$(97) \quad \log|f_{\lambda_n}(z)| < \frac{1}{(R'-r)^3}\left[H_k'\left(\omega_0' + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{d} + n_k(r', 1)\log\frac{1}{\eta}\right) + K_k \log\frac{2}{R'-r}\right].$$

Par le choix de la suite, les ω_0 ont une borne $\bar{\omega}_0$. Pour toutes les fonctions de la suite $f_{\lambda_n}(z)$, il existe un même nombre d par hypothèse et l'on peut prendre le même η puisqu'il est arbitraire. De plus, en vertu des hypothèses, on constate que H_k et K_k sont également les mêmes pour toutes les fonctions $f_{\lambda_n}(z)$.

Alors en remplaçant ω_0 par $\bar{\omega}_0$, l'inégalité (97) montre que les $f_{\lambda_n}(z)$ sont en module bornés dans leur ensemble dans (C_r); et l'on arrive comme dans le théorème précédent à conclure que la suite $f_{\lambda_n}(z)$ est génératrice d'une suite partielle uniformément convergente dans (C_r).

2° Les $f_{\alpha_n}(0)$ ont seulement zéro pour limite. On peut en extraire une suite infinie $f_{\mu_n}(0)$ convergeant vers zéro et l'on considère la suite $f_{\mu_n}(z)$. Dans $(\bar{D})$, les $f_{\mu_n}(z)$ ne s'annulent pas et les fonctions $g_{\mu_n}(z) = \frac{1}{f_{\mu_n}(z)}$ y sont holomorphes. En écrivant $g(z) = g(0) + \varphi(z)$ et en désignant par $\bar{M}(r, \varphi)$ le maximum de $|\varphi_{\mu_n}(z)|$ dans $(\bar{D})$, l'inégalité

$$|f_{\mu_n}(z)| < \frac{1}{|g_{\mu_n}(0)| - \bar{M}(r, \varphi_{\mu_n})}$$

permet de prouver que la suite $f_{\mu_n}(z)$ converge uniformément vers zéro dans $(\overline{\mathrm{D}})$.

A partir de ces résultats, on arrive de suite à conclure que la famille est quasi-normale dans (C_r) avec les A_i comme points irréguliers possibles. Prouvons que ces points sont réguliers. Soit A un de ces points; de centre A, traçons une petite circonférence (γ) ne contenant pas d'autres points A_i. Sur (γ), la famille est normale; toute suite de ses fonctions engendre une suite $f_n(z)$ uniformément convergente sur (γ). Or, d'après ce qui précède, la limite ne peut pas être la constante infinie, donc elle est une fonction holomorphe. Alors d'après un théorème de Weierstrass, la convergence uniforme de la suite $f_n(z)$ a lieu dans tout le cercle (γ). Par conséquent, A est un point régulier.

En particulier, on a le critère :

Soit une famille de fonctions holomorphe définies par

$$(98) \qquad f(z) = \Lambda + \ldots + c_k z^k + c_{k+h} z^{k+h} + \ldots \qquad (c_k,\ c_{k+h} \neq 0)$$

dans le cercle unité, Λ *étant un nombre fixe différent de* 0 *et* 1. *Si elles s'y annulent p fois au plus, si leurs dérivées* $f^{(k)}$ *y admettent* 1 *comme valeur également exceptionnelle* B *et si les* $n(r,\ 1,\ f^{(k)})$ *sont bornés par un nombre* $\overline{n}_k(r,\ 1)$ *ne dépendant que de r, la famille est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que* $c_k \neq 1$ *et que pour les zéros* a_1 *on ait* $|a_1| \geqq d > 0$.

17. Soit (f) une famille de fonction méromophe définie par un développement de forme (74); appelons comme antérieurement famille réduite de (f) une famille (φ) dont les fonctions $\varphi(z)$ se déduisent de $f(z)$ en remplaçant $f(0)$ par un nombre fini $\Lambda \neq 0$.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on peut démontrer le théorème suivant par le procédé que nous avons utilisé pour le théorème analogue du Mémoire cité.

Théorème IV. — *Soit* (f) *une famille de fonctions holomorphe* (74) *dans le cercle unité et* (φ) *une de ses familles réduites dont* $\varphi^{(k)}(0) \neq 1$. *Si les fonctions* $\varphi(z)$ *ne s'y annulent que p fois au plus et si leurs dérivées* $\varphi^{(k)}(z)$ *y admettent* 1 *comme valeur également exceptionnelle* B; *de plus, si les* $n(r,\ 1,\ \varphi^{(k)})$ *sont bornés par un nombre* $\overline{n}_k(r,\ 1)$ *ne dépendant que de r, alors la famille* (f) *est normale dans tout cercle intérieur au cercle unité, pourvu que pour les zéros* α_1 *des* φ, *on ait* $|\alpha_1| \geqq d > 0$.

18. Dans le cas général on a le critère de quasi-normalité suivant :

Théorème V. — *Soit* (f) *une famille de fonctions* $f(z)$ *holomorphe définies par* (74) *dans le cercle unité. Si elles s'y annulent p fois au plus, si leurs dérivées* $f^{(k)}$ *y admettent* 1 *comme valeur également exceptionnelle* B *et si les* *nombres $n(r,\ 1,\ f^{(k)})$ sont bornés par un nombre $\bar{n}(r,\ 1)$ ne dépendant que de r, alors la famille est quasi normale d'ordre p au plus, dans tout cercle $|z| < R'(< 1)$ pourvu que $f^{(k)}(0) \neq 1$ et que $|a_1| \geqq d > 0$.*

En reprenant le raisonnement fait pour le théorème III, nous arrivons à obtenir la suite $f_{\alpha_n}(z)$ et les points $A_i (i = 1, \ldots, p)$. Mais en plus des deux cas considérés dans la démonstration de ce théorème, nous avons ici à examiner encore le cas où les $f_{\alpha_n}(0)$ n'ont en module que l'infini comme limite.

Pour ce cas, on peut extraire des valeurs $f_{\alpha_n}(0)$ une suite $f_{\nu_n}(0)$ qui croît, en module, indéfiniment et l'on montre d'une façon analogue à celle dont on a traité le second cas que la suite $f_{\nu_n}(z)$ converge uniformément en module vers l'infini.

Alors on est conduit à conclure que la famille est quasi normale dans (C_r) avec au plus les A_i comme points irréguliers et la démonstration s'achève aussitôt.

Remarque. — Au moyen de la méthode que M. P. Montel a utilisée pour établir son théorème de quasi-normalité, il est très facile de démontrer le théorème précédent et l'on peut supprimer l'hypothèse que $|a_1| \geqq d > 0$.

CHAPITRE IV.

Extensions du théorème de Landau.

19. On a d'abord le théorème suivant analogue à celui que nous avons obtenu antérieurement et la démonstration se fait de la même façon.

Théorème C. — *Soit une fonction holomorphe*

$$F(Z) = C_0 + C_1 Z + \ldots \qquad (C_0,\ C_1 \neq 0) \tag{99}$$

dans le cercle $|Z| < R$; si elle ne s'y annule que p fois et y admet 1 comme valeur exceptionnelle B, et si les nombres $n(r,\ 1,\ f)$ sont bornés par un nombre $\bar{n}(r,\ 1)$ ne dépendent que de r, on a en supposant $C_0 \neq 1$,

$$|C_1| R < K e^{H\Omega(C_0, C_1)}, \tag{100}$$

avec

$$\Omega(C_0,\ C_1) = \overset{+}{\log}|C_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{C_0}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{C_0 - 1}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{C_1}\right|, \tag{101}$$

H *et* K *sont des constantes numériques.*

20. Occupons-nous du cas où intervient la dérivée et démontrons d'abord le théorème préliminaire :

Soit une fonction holomorphe dans le cercle unité ayant pour développement

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k + \ldots \qquad (c_0,\ c_k,\ c_{k+1} \neq 0). \tag{102}$$

Si elle ne s'y annule que p fois; si sa dérivée d'ordre k y admet un nombre $\lambda (\neq 0)$ *comme valeur exceptionnelle* B, *de sorte que*

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \lambda}\right) < (\tau_1 + \varepsilon) \log \frac{1}{1-r} \qquad \textit{pour} \quad r \geqq r_0;$$

et si les nombres $n(r, \lambda, f^{(k)})$ *sont bornés par un nombre* $\overline{n}_k(r, \lambda)$ *ne dépendent que de* r, *on a, en supposant* $c_k \neq \lambda$, *l'inégalité*

$$m(r, f) < H_k\left(\Omega_k(c_0,\ c_k,\ c_{k+1}) + p \log \frac{1}{d} + \log \frac{1}{r}\right) + K_k \log \frac{2}{1-r}, \tag{103}$$

avec

$$\Omega_k = \overset{+}{\log} |C_0| + \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{c_0}\right| + \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{c_k}\right| + \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{c_{k-\lambda}}\right| + \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{c_{k+1}}\right|,$$

où d est un nombre positif, H_k *et* K_k *sont deux constantes numériques ne dépendant que de* λ, τ_1 *et* r_0 *à part k.*

Considérons l'identité

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{f^{(k)}}{f} - \frac{f^{(k)} - \lambda}{f^{(k+1)}} \frac{f^{(k+1)}}{f}\right),$$

où λ est un nombre différent de zéro. On en déduit

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) m + \left(r, \frac{f^{(k)} - \lambda}{f^{(k+1)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\lambda}\right| + \log 2. \tag{104}$$

En appliquant la formule de Jensen au deuxième terme du second nombre, il vient

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \lambda}\right) \\ + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \lambda}\right) + \log\left|\frac{f^{(k)}(0) - \lambda}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\lambda}\right| + \log 2, \end{aligned}$$

et comme

$$m(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log |f(0)|,$$

on obtient

$$\begin{aligned} m(r, f) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - \lambda}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \lambda}\right) + \log |c_0| + \log\left|\frac{c_k - \lambda}{c_{k+1}}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\lambda}\right| + \log 2, \end{aligned} \tag{105}$$

où en supposant $\left|\frac{1}{\lambda},\ \infty\right| > \delta \geqq 0$, on a $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\lambda}\right| < \log \frac{1}{\delta}$.

Appliquons le lemme I' aux trois premiers termes du second membre et majorons le quatrième et le cinquième par $p\log\frac{1}{d}$ et $(\tau_1+1)\log\frac{1}{\rho-r}$ respectivement, cette inégalité peut être mise alors sous la forme

$$(106)\qquad m(r,f)<\overline{\mathrm{A}}_k\left(\overline{\Omega}_k(c_0,\,c_k,\,c_{k+1})+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{r}\right)+\overline{\mathrm{B}}_k\log\frac{1}{\rho-r}+\overline{\mathrm{C}}_k\overset{+}{\log}\,m(\rho,f)$$

où

$$\overline{\Omega}_k=\overset{+}{\log}|c_0|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|+\overset{+}{\log}|c_k|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_k}\right|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_k-\lambda}\right|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_{k+1}}\right|.$$

Éliminons le terme $\overset{+}{\log}|c_k|$; prenons l'inégalité (19) et désignons son second membre par $\mathrm{P}_k(r,\rho)$. Comme $\mathrm{T}\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ est majoré par $\mathrm{P}_k(r,\rho)+\mathrm{N}\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ qui est égal à $\mathrm{P}_k(r,\rho)+\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)$, on a *a fortiori*

$$\log\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|=\mathrm{T}\left(0,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<\mathrm{P}_k(r,\rho)+\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

par suite

$$\overset{+}{\log}|f^{(k)}(0)|=\overset{+}{\log}\left|f(0)\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|<\overset{+}{\log}|f(0)|+\overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|$$
$$<\overset{+}{\log}|c_0|+\mathrm{P}_k(r,\rho)+p\log\frac{1}{d}.$$

En substituant cette borne à $\overset{+}{\log}|c_k|$, l'inégalité (106) devient

$$(107)\qquad m(r,f)<\mathrm{A}_k\,\Omega_k\left(c_0,\,c_k,\,c_{k+1})+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{r}\right)+\mathrm{B}_k\log\frac{1}{\rho-r}+\mathrm{C}_k\overset{+}{\log}\,m(\rho,f)$$

et elle est valable pour $r\geqq r_0$.

Appliquons alors le théorème A à cette inégalité; il vient de suite, pour $r\geqq r_0$,

$$(108)\qquad m(r,f)<\mathrm{H}_k\left(\Omega_k(c_0,\,c_k,\,c_{k+1})+p\log\frac{1}{d}+\log\frac{1}{r}\right)+\mathrm{K}_k\log\frac{2}{1-r},$$

inégalité qui reste valable pour $r<r_0$, si l'on majore éventuellement H_k et K_k. Ces deux coefficients peuvent dépendre alors de δ, τ_1 et r_0 à part k.

21. Maintenant, nous allons établir le théorème en vue.

Théorème D. — *Soit une fonction holomorphe*

$$(109)\qquad \mathrm{F}(\mathrm{Z})=\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1\mathrm{Z}+\mathrm{C}_2\mathrm{Z}^2+\ldots\qquad(\mathrm{C}_0,\,\mathrm{C}_1,\,\mathrm{C}_2\neq 0)$$

dans le cercle $|\mathrm{Z}|<\mathrm{R}$ *et l'on suppose que* $\mathrm{C}_1\neq 1$ *et* $\mathrm{R}|\mathrm{C}_1|\neq 1$ *dans le cas où* $|\mathrm{C}_1|<1$. *Si* $\mathrm{F}(\mathrm{Z})$ *ne s'annule que p fois dans ce cercle; si sa dérivée* $\mathrm{F}'(\mathrm{Z})$ *y admet* 1 *comme valeur exceptionnelle* B, *de sorte que l'on ait*

$$\mathrm{N}\left(\rho,\frac{1}{\mathrm{F}'-1}\right)<(\tau_1+\varepsilon)\log\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\rho}\qquad(0<\rho<\mathrm{R})$$

pour $\rho \geqq \rho_0$; *et si les nombres* $n(r, 1, f^{(f)})$ *sont bornés par un nombre* $\bar{n}_k(r, 1)$ *ne dépendant que de* r, *alors, en désignant par* d *un nombre positif supérieur ou égal au module du premier zéro de* F, *on a l'inégalité*

$$|C_1| R < K e^{H\Omega_1(C_0, C_1, C_2)}, \tag{110}$$

avec

$$\Omega_1 = \overset{+}{\log} |C_0| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{C'_0} \right| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{C_1} \right| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{|C_1| - 1} \right| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{C_2} \right| + p \log \frac{1}{d}, \tag{111}$$

H *et* K *étant deux constantes qui dépendent seulement de* τ_1 *et* ρ_0.

Posons $Z = Rz$; les cercles $|Z| = R$ et $|Z| = \rho (< R)$ se transforment respectivement en $|z| = 1$ et $|z| = r (< 1)$ avec $\rho = Rr$ et l'on a

$$f(z) = F(Rz) = C_0 + C_1 R z + C_2 R^2 z^2 + \ldots. \tag{112}$$

Cette fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle unité et ne s'y annule que p fois. De plus, si β_μ est un zéro de $F' - 1$ dans le cercle $|Z| \leqq \rho$, $b_\mu = \frac{\beta_\mu}{R}$ sera un zéro de $f' - R$ dans le cercle $|z| \leqq r$ avec le même ordre de multiplicité; il en résulte que $N\left(r, \frac{1}{f' - R}\right) = N\left(\rho, \frac{1}{F' - 1}\right)$. Comme $\frac{R}{R - \rho} = \frac{1}{1 - r}$, R est une valeur exceptionnelle B pour f'.

Alors on peut appliquer à f le théorème précédent. En observant que R peut être supposé supérieur à 1 et en tenant compte des hypothèses sur C_1, on a

$$m(r, f) < H'\left(\Omega_1(C_0, C_1, C_2) + \log \frac{1}{r}\right) + K' \log \frac{2}{1 - r}. \tag{113}$$

D'autre part, une inégalité de Cauchy et l'inégalité (37) donnent

$$f'(0) < \frac{1}{3} M\left(\frac{1}{3}, f\right) \quad \text{et} \quad \log M\left(\frac{1}{3}, f\right) < 3m\left(\frac{2}{3}, f\right). \tag{114}$$

Des inégalités (113) et (114), on déduit immédiatement (110).