JAMES A. JENKINS

# Sur quelques aspects globaux du théorème de Picard

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 72, nº 2 (1955), p. 151-161

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_2_151_0>

SUR

# QUELQUES ASPECTS GLOBAUX

DU

# THÉORÈME DE PICARD

PAR M. JAMES A. JENKINS.

1. Selon le fameux théorème de Picard, si une fonction est uniforme et méromorphe au voisinage d'une singularité essentielle, il y a au plus deux valeurs (y compris l'infini) qu'une fonction ne prend pas dans ce voisinage. De telles valeurs sont ce qu'on appelle des valeurs exceptionnelles locales de Picard. Récemment M. Dugué [2] souleva la question très intéressante des relations entre les valeurs locales exceptionnelles de Picard au voisinage de différentes singularités essentielles d'une fonction donnée. Dans le Mémoire cité, il établissait qu'une fonction avec $n$ singularités essentielles peut avoir au plus $n+1$ valeurs exceptionnelles de Picard distinctes pour ces $n$ points. Malheureusement, une inexactitude dans la démonstration en fausse le résultat.

L'objet du présent article est de prouver qu'il peut y avoir $2n$ valeurs exceptionnelles de Picard, pour $n$ singularités essentielles sans autre restriction. La méthode consiste, dans le cas le plus simple de deux singularités essentielles, à combiner deux surfaces de Riemann paraboliques simplement connexes, chacune d'entre elles recouvrant la sphère complexe excepté deux points, pour obtenir une surface de Riemann doublement connexe dont on montre alors qu'elle est conformément équivalente à une sphère moins deux points. La représentation conforme de cette dernière sphère sur la surface doublement connexe fournit alors l'exemple cherché dans le cas où $n=2$. L'extension au cas général est immédiate. Les mêmes idées peuvent être utilisées pour discuter les questions analogues soulevées par M. Dugué de la relation entre les ensembles localement exceptionnels d'une fonction dans le voisinage de deux courbes singulières disjointes ou dans le voisinage de deux arcs d'une seule courbe singulière. Elles permettent aussi de répondre a d'autres questions posées dans le même Mémoire.

Je désire remercier M. Dugué qui a bien voulu traduire en français cet article et dire que j'ai eu avec lui une correspondance très profitable sur ce sujet.

2. Nous établirons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Étant donné quatre valeurs complexes $a$, $b$, $c$, $d$, (pouvant être infinies) avec $a \neq b$, $c \neq d$, il existe une fonction uniforme $f(z)$, méromorphe excepté à l'origine et à l'infini qui sont des singularités essentielles, et telles que $a$ et $b$ soient des valeurs exceptionnelles locales de Picard à l'origine et $c$ et $d$ des valeurs exceptionnelles de Picard à l'infini.*

Désignons par $S(a, b)$ la surface universelle de recouvrement de la $w$-sphère ponctuée en $w = a$ et $w = b$, c'est-à-dire la surface de Riemann de $\log\left(\frac{w-a}{w-b}\right)$ pour $a$ et $b$ finis, (avec une expression semblable si l'un est infini) et par $S(c, d)$ la surface universelle de recouvrement de la $w$-sphère ponctuée en $w = c$ et $w = d$.

Fendons un feuillet de $S(a, b)$ le long d'un segment $\sigma_1$, et un feuillet de $S(c, d)$ le long d'un segment $\sigma_2$, $\sigma_1$ et $\sigma_2$ recouvrant le même segment du $w$-plan, un segment qui ne rencontre aucun des points $a$, $b$, $c$, $d$. Raccordons $S(a, b)$ et $S(c, d)$ le long de $\sigma_1$ et $\sigma_2$, nous obtenons une surface de Riemann R recouvrant la $w$-sphère. On voit immédiatement que la surface R est doublement connexe et de genre o et que les points le long desquels les surfaces initiales sont raccordées constituent sur R une courbe fermée simple $\Sigma$ frontière des deux parties de R.

D'après le théorème général d'uniformisation R peut être représenté conformément sur un domaine annulaire D dans le plan $z$ :

$$0 \leqq \rho_1 < |z| < \rho_2 \leqq \infty.$$

Montrons maintenant que chaque frontière se réduit à un point. En fait $\Sigma$ correspond à une courbe fermée simple C séparant les deux frontières de D. La partie $D^*$ de D bornée par C et par $|z| = \rho_1$ correspond à $S(a, b)$ fendue le long de $\sigma$, ou à $S(c, d)$ fendue le long de $\sigma_2$. Supposons que ce soit $S(a, b)$. La fonction $\mathfrak{h} = \log\left(\frac{w-a}{w-b}\right)$ applique $S(a, b)$ fendue le long de $\sigma$, sur le $\mathfrak{h}$-plan fini fendu le long d'un arc analytique $\sigma'$ (pourvu que $a$ et $b$ soient finis avec une expression semblable si l'un est infini)

Dans la représentation conforme du $\mathfrak{h}$-plan sur le $z$-plan ce dernier domaine correspond à D avec $\mathfrak{h} = \infty$ correspondant à la frontière $|z| = \rho_1$. Cette dernière doit donc se réduire au point $z = 0$ puisque dans une représentation conforme un point frontière ne peut correspondre à une courbe frontière. Donc $\rho_1 = 0$. De même la frontière $|z| = \rho_2$ de D se réduit au point $z = \infty$. D est donc simplement la $z$-sphère ponctuée en $z = 0$ et $z = \infty$. La fonction $w = f(z)$ appliquant la sphère ainsi ponctuée sur R est donc uniforme et méromorphe sauf aux points $z = 0$ et $z = \infty$. La structure de la surface R montre que ces points sont des singularités essentielles de $f(z)$. De plus $a$ et $b$ sont des valeurs locales exceptionnelles de Picard au voisinage de $z = 0$ et $c$ et $d$ des valeurs exceptionnelles locales de Picard au voisinage de $z = \infty$. Le théorème 1 est donc démontré.

Corollaire 1. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe ayant deux singularités essentielles et quatre valeurs exceptionnelles locales de Picard distinctes en ces deux singularités.*

Il suffit de prendre $a$, $b$, $c$, $d$ distinctes dans ce qui précède. Une généralisation immédiate conduit au résultat suivant :

Théorème 2 — *Étant donné 2 n valeurs complexes $a_j$, $b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ avec $a \neq b$ il existe une fonction uniforme $f(z)$ méromorphe sur la z- sphère complexe excepté en n singularités essentielles $p_1, \ldots, p_n$ et telles que $a_j$ et $b_j$ soient des valeurs exceptionnelles locales de Picard dans le voisinage de $p_j$, $(j = 1, 2, \ldots n)$.*

Soit $S(a_j, b_j)$ la surface universelle de recouvrement de la $w$-sphère ponctuée en $w = a_j$ et $w = b_j$. Comme plus haut nous racorderons ces surfaces (ce que l'on peut faire de plusieurs façons) pour obtenir une surface de Riemann R recouvrant le $w$-plan. Il est nécessaire de s'arranger pour que les différentes lignes de connexion ne se coupent pas, ce qui peut se faire en prenant des lignes de connexion distinctes sur des segments disjoints du $w$-plan.

On voit immédiatement que R est $n$-uplement connexe et de genre 0 et la même démonstration que ci-dessus montre qu'elle est conformément équivalente à la $z$-sphère ponctuée en $n$ points $p_1, \ldots, p_n$ correspondant aux $n$ parties de la frontière idéale de la surface R.

La fonction $w = f(z)$ représentant conformément la $z$-sphère ainsi ponctuée sur R est uniforme et méromorphe excepté aux points $p_1, \ldots, p_n$. On voit immédiatement que ce sont des singularités essentielles de $f(z)$ et que $a_j$ et $b_j$ sont des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de $p_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Corollaire 2. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe avec n singularités essentielles et 2 n valeurs exceptionnelles locales de Picard en ces n-singularités.*

On peut réaliser de plusieurs façons une fonction méromorphe définie pour $z$ fini avec une singularité essentielle à $z$ infini et telle qu'elle ait ou non des valeurs exceptionnelles locales de Picard à $z=\infty$. Elle représentera conformément le $z$-plan fini sur une surface de Riemann parabolique sur le plan $w$. Dans le cas où il y a une valeur exceptionnelle cette dernière peut être choisie arbitrairement. En se servant de telles surfaces au lieu de surfaces S $(a_j, b_j)$ dans la construction employée dans la démonstration du théorème 2 nous voyons que pour une fonction à $n$ singularités essentielles le comportement des valeurs locales exceptionnelles de Picard est complètement indépendant. En chaque singularité il peut y avoir 0, 1 ou 2 telles valeurs exceptionnelles et ces valeurs avec différentes singularités peuvent être choisies arbitrairement. Cela complète la réponse à une question partiellement traitée par Dugué ([2], p. 76-79). Nous résumons tout cela dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe ayant $n$ singularités essentielles telles que en chaque singularité il puisse y avoir* 0, 1 *ou* 2 *valeurs locales exceptionnelles de Picard et ces valeurs avec différentes singularités sont sans restrictions mutuelles.*

3. La méthode précédente peut être utilisée aussi bien pour traiter au lieu des valeurs exceptionnelles de Picard, les valeurs régulières par rapport à 2([2], p. 80). Soit $f(z)$ ayant le point $p$ pour singularité essentielle et soit la valeur finie $a$ telle que dans le voisinage de $p$ chaqne racine de $f(z)-a$ est double. On appellera alors $a$, une valeur locale régulière par rapport à 2 de $f(z)$ au voisinage de $p$. Pour $a$ infini on remplacera $f(z)-a$ par $\frac{1}{f(z)}$ dans la définition.

On peut facilement construire une surface de Riemann parabolique sur la $w$-sphère n'ayant aucun point en $w=a$ et tel que tout point sur cette surface au-dessus de $w=b$ et de $w=c$ soit un point de ramification d'ordre 2. Par exemple on prendra la surface de Riemann sur laquelle la fonction

$$w=\frac{a(b-c)\cos z+(ab+ac-2bc)}{(b-c)\cos z+(2a-b-c)}$$

représente le $z$-plan fini dans le cas où $a$, $b$, $c$ sont finis et avec expression analogue si l'un d'eux est infini. Pour cette fonction $a$ est une valeur exceptionnelle de Picard et $b$ et $c$ sont régulières par rapport à 2. On peut de même construire une surface de Riemann parabolique sur la $w$-sphère et telle que tout point sur cette surface au-dessus des points distincts $w=a$, $b$, $c$ et $d$ soit un point de ramification du second ordre. Telle est la surface de Riemann de l'intégrale elliptique

$$\mathfrak{h}=\int^{w}\frac{dw}{\sqrt{(w-a)(w-b)(w-c)(w-d)}}$$

au cas où $a$, $b$, $c$, $d$ sont finis avec une expression correspondante si l'un d'eux est infini.

En associant $n$ surfaces $(n \geq 2)$ de ces types par des raccordements analogues à ceux du paragraphe 2 on obtient une surface de Riemann recouvrant la $w$-sphère conformément équivalente à la $z$-sphère complexe ponctuée en $n$ points et la fonction $f(z)$ représentant l'une sur l'autre a $n$ singularités essentielles. Par construction nous pouvons avoir en chacune de ces singularités essentielles soit une valeur locale de Picard exceptionnelle et deux valeurs localement régulières par rapport à 2 ou quatre valeurs localement régulières par rapport à 2. Ces valeurs peuvent évidemment être choisies sans restrictions mutuelles. Ceci répond à une question posée par Dugué([2], p. 80). Nous résumons ces remarques dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe ayant n singularités essentielles telles qu'en chaque singularité particulière il y ait soit une valeur locale exceptionnelle de Picard et deux valeurs localement régulières par rapport à 2 soit quatre valeurs localement régulières par rapport à 2 et ces valeurs sont sans restrictions mutuelles.*

Plus généralement, en utilisant les surfaces du type considéré au paragraphe 2, nous pouvons avoir en certaines des singularités deux valeurs locales exceptionnelles de Picard indépendantes des autres.

4. De plus M. Dugué a soulevé la question ([2], p. 80) de savoir si une fonction sur la $z$-sphère ayant une infinité de singularités essentielles pouvait avoir une infinité de valeurs exceptionnelles locales de Picard distinctes. Une telle fonction aurait naturellement aussi d'autres singularités de type plus compliqué. Nos méthodes peuvent servir à établir l'existence de telles fonctions ayant une infinité de valeurs exceptionnelles locales de Picard distinctes. En fait nous allons construire maintenant une surface telle qu'il y ait juste une singularité de plus que l'infinité de singularités essentielles. Cette singularité de type plus compliqué sera la limite des singularités essentielles pour lesquelles il y a deux valeurs exceptionnelles de Picard, toutes étant distinctes.

Prenons une suite de surfaces $S(a_j, b_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $S(a_j, b_j)$ étant la surface universelle de recouvrement de la $w$-sphère ponctuée en $a_j$ et $b_j$ $(a_j \neq b_j)$. Supposons qu'aucun des points $a_j$, $b_j$ n'est à une distance $\sqrt{2}$ de l'axe positif réel dans le plan $w$. Soit la surface $S(a_1, b_1)$ fendue le long d'un segment $\sigma_1$, sur un feuillet recouvrant le segment $(0, 1)$ de l'axe réel et soit la surface $S(a_j, b_j)$ $(j > 1)$, fendue le long de segments $\sigma_{j-1}'$ et $\sigma_j$ sur le même feuillet recouvrant respectivement les segments $(2j-4, 2j-3)$ et $(2j-2, 2j-1)$.

Raccordons les surfaces $S(a_j, b_j)$ et $S(a_{j+1}, b_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots)$ le long des segments respectifs $\sigma_j$ et $\sigma_j'$. De cette façon nous obtenons une surface de Riemann R de type plan recouvrant la $w$-sphère et de connectivité infinie. Par le théorème général d'uniformisation on peut la représenter conformément sur un domaine D consistant en $|Z| < R \leq \infty$ (qui est *à priori* soit un cercle, soit le plan fini) fendu le long d'un ensemble infini $\mathfrak{S}$ d'arcs circulaires centrés en $z=0$ que nous prenons pour image d'un point sur $S(a_1, b_1)$. Nous allons prouver que R est infini et que les arcs circulaires se réduisent à des points qui ont pour unique point d'accumulation $z=\infty$. A $S(a_1, b_1)$ fendue comme ci-dessus le long de $\sigma_1$ correspond un sous-domaine doublement connexe $\Delta_1$ de D. Uue composante de la frontière de $\Delta_1$ est un arc circulaire dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ tandis que l'autre est une courbe C analytique par morceaux correspondant à $\sigma_1$ et séparant le point $z=0$ du reste de la frontière de D. On voit que la première composante se réduit à un point que nous appellerons $p$, comme dans les considérations du § 2. A $S(a_j, b_j)$ $(j>1)$ fendue le long de $\sigma'_{j-1}$ et $\sigma_j$ correspond un sous domaine triplement connexe $\Delta_j$ de D. Deux composantes de la frontière de $\Delta_j$ sont des courbes $C_{j-1}$ et $C_j$ analytiques par morceaux et correspondant à $\sigma'_{j-1}$ et $\sigma_j$ respectivement. La troisième est un arc circulaire de l'ensemble $\mathfrak{S}$ dont on voit comme ci-dessus qu'il se réduit à un point que nous appellerons $p_j$. Chaque courbe $C_j$ sépare $z=0$, tous les $C_i$ $(i<j)$, et tout $p_i$ $(i\leqq j)$ du reste de la frontière de D.

Soit $D_j$ $(j>1)$, le domaine doublement connexe borné par $C_{j-1}$ et $C_j$ et soit $M_j$ son module conforme, c'est-à-dire, si $D_j$ est représenté conformément sur un anneau circulaire de rayons $r_j$ et $R_j$, $M_j=\frac{1}{2}\log\frac{R_j}{r_j}$. Il est bien connu que ceci est de même le module de $D_j$ pour la famille de courbes dans $D_j$ séparant $C_{j-1}$ et $C_j$ [3, 1, 5]. Nous allons montrer que les nombres $M_j$ ont une borne différente de zéro.

Considérons en effet le rectangle sur $S(a_j, b_j)$ couvrant le rectangle du $w$-plan défini par $2j-5<\mathcal{R}w<2j$, $-1<\mathcal{I}w<1$ et situé sur le même feuillet que $\sigma'_{j-1}$ et $\sigma_j$. Un tel rectangle existe étant donné la condition imposée à $a_j$ et $b_j$. Ce rectangle fendu le long de $\sigma'_{j-1}$ et de $\sigma_j$ est un domaine triplement connexe. Faisons jouer aux composantes de sa frontière $\sigma'_{j-1}$, $\sigma_j$ et au périmètre du rectangle le rôle de $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ dans ([4], p. 347). Alors pour la valeur spéciale $M[1, 1, 0]$ de l'invariant conforme défini là nous déduisons d'une manière habituelle (*voir* [4], p. 349) $M(1, 1, 0)<M_j$. Ce module du domaine triplement connexe ci-dessus est positif et a une valeur indépendante de $j$. Cela prouve que les nombres $M_j$ ont une borne inférieure positive. Il s'en suit maintenant d'un principe bien connu de Grötzch [3] que R est infini et de plus que les courbes $C_j$ tendent vers $z=\infty$ quand $j\to\infty$. En particulier par conséquent les points $p_j$ tendent vers l'infini. Finalement R est conformément équivalent à la $z$-sphère ponctuée aux points $p_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ et $z=\infty$. La fonction $f(z)$ représentant conformément ce domaine sur R est par conséquent méromorphe excepté aux points $z=p_j, \ldots$ $(j=1, 2, \ldots)$ et $z=\infty$. On voit maintenant que les points $p_j$ sont des singularités essentielles de $f(z)$ avec $a_j$ et $b_j$ comme valeurs exceptionnelles locales de Picard au voisinage de $p_j$. Le point $z=\infty$ est une singularité plus compliquée, la seule en dehors des singularités essen-

tielles. Ainsi il peut y avoir une infinité de valeurs distinctes parmi les $a_j$ et les $b_j$. Toutes peuvent même être distinctes. Nous résumerons ces résultats dans l'énoncé suivant :

Théorème 5. — *Il existe une fonction uniforme sur la sphère complexe avec une infinité dénombrable de singularités essentielles qui ont un point unique d'accumulation, telle que en chacune des singularités essentielles particulières il y ait deux valeurs locales exceptionnelles de Picard et telles que toutes ces valeurs pour les différentes singularités essentielles soient distinctes.*

5. Nous observons aussi que nous pouvons faire des constructions semblables pour obtenir des fonctions définies non sur la sphère complexe mais sur des surfaces de genre plus élevé. Par exemple si nous prenons les surfaces S $(a, b)$ et $(c, d)$ dont nous nous sommes occupés au paragraphe 2 et si nous les raccordons non suivant un mais suivant deux segments nous obtenons une surface R couvrant la $w$-sphère conformément équivalente à une surface $\tau$ de genre 1 (tore) ponctuée en deux points. La fonction représentant conformément $\tau$ ainsi ponctuée sur R aura en ces points des singularités essentielles et sera ailleurs méromorphe. Au voisinage de l'un de ces points $a$ et $b$ seront des valeurs locales exceptionnelles de Picard et au voisinage de l'autre $c$ et $d$ le seront aussi. Ainsi nous pouvons avoir le maximum possible *a priori* de valeurs locales exceptionnelles de Picard dans ce cas également.

Des constructions semblables peuvent être effectuées pour le cas de davantage de singularités et pour des surfaces de genre supérieures à 1.

6. Examinons maintenant les ensembles exceptionnels d'une fonction au voisinage d'un continuum. Soit $\Gamma$ un continuum sur la $z$-sphère et D un de ses domaines complémentaires simplement connexes. Par voisinage de $\Gamma$ dans D nous entendons le complément relativement à D d'un sous-ensemble compact de D. Soit $f(z)$ uniforme et méromorphe au voisinage de $\Gamma$ dans D. Par valeur exceptionnelle locale de $f(z)$ au voisinage de $\Gamma$ ([2], p. 72) nous entendons une valeur $a$ telle que $f(z) - a$ n'a pas de zéro dans quelque voisinage [peut-être plus petit que le domaine de définitions de $f(z)$] de $\Gamma$ dans D (pour la valeur $\infty$ nous remplaçons $f(z) - a$ par $\frac{1}{f(z)}$ dans cette définition).

Nous allons maintenant montrer que pour une fonction dans un domaine borné par des continuums disjoints, les ensembles de valeurs exceptionnelles dans les voisinages des différentes parties de la frontière sont essentiellement indépendants. Nous montrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème 6. — *Soit $E_i$ l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles dans le voisinage de la frontière d'un domaine* $D_i$ *hyperbolique simplement connexe pour une fonction méromorphe $f_i(z)$ définie dans ce domaine $(i = 1, 2)$. Il existe un do-*

*maine doublement connexe $D^\star$ borné par deux continuums $C_1$ et $C_2$ et une fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans $D^\star$ telle que $E_i$ est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ dans le voisinage de $C_i$ $(i=1,2)$.*

Soit $R_i$ $(i=1,2)$ la surface de Riemann recouvrant la $w$-sphère sur laquelle $D_i$ est représentée par $f_i$. Appelons $\mathfrak{S}$ une surface de Riemann elliptique recouvrant uniformément la $w$- sphère. Raccordons chacune des deux surfaces $R_1$ et $R_2$ à $\mathfrak{S}$ le long d'un segment de la manière habituelle (les deux segments ne se coupant pas) nous obtenons une surface de Riemann doublement connexe R de type planaire et recouvrant la $w$-sphère. Si $R_1$ et $R_2$ couvrent des points communs sur la $w$-sphère l'introduction de $\mathfrak{S}$ n'est pas nécessaire. Comme au paragraphe 2, R peut être représenté conformément sur un domaine doublement connexe $D^\star$ dans le $z$-plan, soit une couronne circulaire. Soient $C_i$, $(i=1,2)$ la partie de la frontière de $D^\star$ adjacente à la portion de $D^\star$ provenant de $R_i$. La démonstration du paragraphe 2 appliquée à ce cas montre que chacun des $C_1$, et $C_2$ est un continuum non dégénéré. Soit $f(z)$ la fonction représentant $D^\star$ conformément sur R. Alors $f(z)$ est uniforme et méromorphe dans $D^\star$ et nous vérifions immédiatement que $E_i(i=1,2)$ est l'ensemble de valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de $C_i$.

D'une manière analogue nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 7. — *Soit $E_i$ l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine $D_i$ hyperbolique simplement connexe pour une fonction méromorphe $f_i(z)$ définie dans ce domaine $(i=1, 2, \ldots, n)$. Il existe un domaine D de connexion n borné par des continuums $C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ et une fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans $D^\star$ telle que $E_i$ est l'ensemble des valeurs exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de $C_i$.*

Corollaire 3. — *Soit $E_i$ l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine simplement connexe $D_i$ avec une frontière analytique $\Gamma_i$ pour une fonction méromorphe $f_i(z)$ définie dans ce domaine et ayant $\Gamma_i$ comme courbe singulière $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$. Il existe un domaine $D^\star$ d'ordre de connexion borné par des courbes analytiques $C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ et une fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans $D^\star$ telle que $E_i$ soit l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de $C_i$ et $C_i$ une courbe singulière de $f(z)$.*

Cela se déduit immédiatement du théorème 7 avec la remarque additionnelle que le prolongement de $f(z)$ à travers $C_i$ impliquerait le prolongement de $f(z)$ à travers $\Gamma_i$. En particulier l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles peuvent n'avoir aucun élément en commun.

De plus nous pouvons traiter de même les ensembles locaux exceptionnels pour deux arcs frontières sur une partie de la frontière donnée. Soit D un domaine simplement connexe et $\Gamma$ un arc frontière de D (au sens naturel de correspondance frontière, c'est-à-dire, de bouts premiers, si nous permettons le type le plus général de frontière pour D). Par voisinage de $\Gamma$ nous comprenons un voisinage dans la topologie de D fermée comme un espace topologique par l'adjonction de bouts premiers. La définition de valeur locale exceptionnelle est alors analogue à celle pour la totalité de la frontière, en observant que nous ne pouvons parler que des valeurs de la fonction aux points du voisinage intérieur de D. Le résultat suivant montre que les ensembles de valeurs locales exceptionnelles pour deux arcs frontières sont indépendants.

THÉORÈME 8. — *Soit* $E_i$ *l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine hyperbolique simplement connexe* $D_i$, *pour une fonction méromorphe* $f_i(z)$ *définie dans ce domaine* $(i = 1, 2)$. *Alors il existe un domaine* D *simplement connexe avec des arcs frontières* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, *tels que* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *est la frontière de* $D^\star$ *et* $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ *consiste seulement en des extrémités de* $\Gamma_1$ *et* $\Gamma_2$ *et une fonction* $f(z)$ *méromorphe dans* $D^\star$ *telle que* $E_i$ *est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de* $f(z)$ *au voisinage de* $\Gamma_i$ $(i = 1, 2)$.

Soit $R_i$ la surface de Riemann recouvrant la $w$-sphère sur laquelle le $D_i$ est représenté conformément par $f_i$ $(i = 1, 2)$. Nous pouvons faire l'hypothèse que $R_1$ et $R_2$ recouvrent un point commun sur la $w$-sphère puisque autrement on pourrait y remédier en raccordant à l'une d'elle une surface de Riemann elliptique recouvrant uniformément la sphère (sans changer les valeurs locales exceptionnelles correspondantes). Soit $w = a$ le point ainsi recouvert. Soit $\tau_i$ un arc semi-ouvert dans $R_i$ $(i = 1, 2)$, recouvrant un arc dans la $w$-sphère, allant d'un point $p_i$ sur $R_i$ recouvrant $a$ à un point frontière de $R_i$ sans passer par un point de ramification algèbrique de $R_i$. Fendons les surfaces $R_i$ $(i = 1, 2)$, respectivement le long de $\tau_i$ et raccordons-les le long des segments $\sigma_i$ ayant une extrémité à $p_i$, recouvrant le même segment dans le $w$-plan et ne rencontrant pas $\tau_i$. De cette façon nous obtenons une surface de Riemann R simplement connexe et du type hyperbolique. Il y a alors un domaine $D^\star$ simplement connexe hyperbolique dans le $z$-plan qui est représenté conformément sur R par une fonction méromorphe $f(z)$. Ce domaine a deux éléments frontières provenant des points $p_i$ et ces derniers divisent sa frontière en deux arcs $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ pour lesquels $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ont évidemment les propriétés de l'énoncé du théorème 8. Soit $\Gamma_1$ l'arc contenant des éléments correspondants aux éléments frontières de $D_1$.

Nous allons montrer que $E_i$ est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de $\Gamma_i$ $(i = 1, 2)$. En fait les valeurs qui ne sont pas des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ dans le voisinage de $\Gamma_i$ sont des valeurs prises une infinité de fois par $f(z)$ dans tout voisinage de $\Gamma_i$. Les valeurs prises par $f(z)$ dans un voisinage V de $\Gamma_i$ consistent dans les valeurs de la $w$-sphère couvertes par un voisinage $V_1$ de la frontière de $R_i$ les points de $\tau_i$ étant enlevés et dans les valeurs couvertes par un voisinage $V_2$ sur $R_i$ d'un sous arc fermé de $\tau_i$. Puisque aucune valeur n'est prise par $f(z)$ plus d'un nombre fini de fois dans la portion de V correspondant à $V_2$ aucune valeur locale exceptionnelle de $E_i$ n'est perdue. D'un autre côté puisque chaque point de $\tau_i$ couvre au plus un point de la $w$-sphère, aucune valeur locale exceptionnelle n'est ajoutée. Ainsil'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de $f(z)$ au voisinage de $\Gamma_i$ est $E_i$ ($i = 1, 2$), ce qui prouve le théorème 8.

Corollaire 4. — *Soit* $E_i$ *l'ensemble des valeurs locales exeptionnelles au voisinage de la frontière d'un domaine simplement connexe* $D_i$ *à frontière analytique pour une fonction méromorphe* $f_i(z)$ *définie dans ce domaine et ayant sa frontière pour courbe singulière* ($i = 1, 2$).

*Il existe un domaine simplement connexe* $D^\star$ *à une frontière analytique* $\Gamma$ *composee de deux arcs* $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ *dont l'intersection consiste uniquement en leurs extrémités et une fonction* $f(z)$ *méromorphe dans* $D^\star$, *ayant comme* $\Gamma$ *courbe singulière et telle que* $E_i$ *est l'ensemble des valeurs locales exceptionnelles de* $f(z)$ *dans le voisinage de* $\Gamma_i$ ($i = 1, 2$).

Dans ce but nous n'avons qu'à choisir $\tau_i$ dans la construction du théorème 8 ($i = 1, 2$) de telle sorte que $\tau_i$ recouvre un arc de Jordan non analytique sur la $w$-sphère. Alors $f(z)$ ne peut être prolongée à travers les arcs provenant des arcs $\tau_i$ et comme dans la preuve du corollaire 3 elle ne peut être prolongée à travers les arcs de $\Gamma$ provenant des frontières de $D_i$. En particulier les ensembles $E_1$ et $E_2$ peuvent ne pas avoir d'éléments communs. Remarquons enfin que ces résultats peuvent être combinés de bien des façons avec ceux des sections précédentes. En fait la méthode développée ici sert à traiter de telles questions pour les propriétés de fonctions dépendant essentiellement de la géométrie des surfaces de Riemann et non de considérations analytiques telles que certains procédés d'exhaution, etc. bien que des résultats puissent aussi être obtenus dans cette dernière direction.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Ahlfors et A. Beurling, *Invariants conformes et problèmes extrémaux* (*X*e *Congrès des Mathématiciens scandinaves*, 1946).

[2] Daniel Dugué, *Vers un théorème de Picard global* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 69, 1952, p. 65-81).

[3] H. Grötzsch, *Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, I* (*Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, vol. **80**, 1928, p. 367-376).

[4] James A. Jenkins, *Some problems in conformal mapping* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **67**, 1949, p. 327-350).

[5] James A. Jenkins, *Some results related to extremal length* (*Contributions to the Theory of Riemann Surfaces, Annals of Mathematics Studies*, n° **30**, 1953, p. 87-94).