ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. DUFRESNOY

CH. PISOT

Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 72, nº 1 (1955), p. 69-92

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_1_69_0>

ÉTUDE DE
CERTAINES FONCTIONS MÉROMORPHES BORNÉES SUR LE CERCLE UNITÉ
APPLICATION A UN
ENSEMBLE FERMÉ D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

PAR MM. J. DUFRESNOY ET CH. PISOT.

1. — Introduction.

Nous allons poursuivre ici l'étude de l'ensemble S des entiers algébriques θ supérieurs à 1 et dont tous les conjugués ont un module strictement inférieur à 1. Nous avons déjà consacré à cette question un Mémoire [1] dont, en règle générale, nous utiliserons les notations.

Nous représenterons donc par

$$P(z) \equiv p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_{s-1} z^{s-1} + \varepsilon z^s,$$

où $p_0 > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, le polynome irréductible ayant θ pour zéro et par $Q(z)$ le polynome

$$Q(z) \equiv \varepsilon z^s P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Excepté pour les polynomes $P(z)$ de la forme $1 + p_1 z + z^2$, où $p_1 \leqq -3$, la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ a un module égal à 1 sur $|z| = 1$ et possède dans le cercle unité un pôle et un seul $z = \frac{1}{\theta}$. Au voisinage de l'origine, elle a un développement en série de puissances à coefficients entiers. Cette fraction rationnelle joue un rôle essentiel dans l'étude de l'ensemble S.

---

(1) *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 70, 1953, p. 105-133. Quelques compléments ont été donnés ultérieurement dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. 77, 1953, p. 129-136.

Rappelons que l'ensemble S est fermé ([2]). Dans notre Mémoire cité, nous avons démontré que $\theta_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le plus petit élément de l'ensemble dérivé S'; nous avons aussi obtenu les quatre plus petits éléments de S. On sait que M. Siegel, avait déterminé antérieurement ([3]) les deux plus petits éléments; il n'a pas obtenu tous les nombres de S inférieurs à θ_∞; mais il a toutefois signalé parmi ceux-ci les nombres suivants que nous désignerons par θ_n et θ'_n ([4]) :

$$\theta_n, \text{ zéro de } \quad P_{2p}(z) \equiv \frac{1 - z^{2p}(1+z-z^2)}{1-z} \quad \text{si} \quad n = 2p \qquad (p \geqq 1),$$

$$\text{» de } \quad P_{2p+1}(z) \equiv \frac{1 - z^{2p+1}(1+z-z^2)}{1-z^2} \quad \text{si} \quad n = 2p+1 \qquad (p \geqq 1);$$

$$\theta'_n, \text{ zéro de } \quad 1 - z^2 + z^n(1+z-z^2) \quad \text{avec} \quad n \geqq 1.$$

Ici, par une méthode nouvelle, ne faisant pas appel à notre Mémoire antérieur, nous allons montrer que l'étude de S est intimement liée au « problème des coefficients » pour une fonction $f(z)$ méromorphe dans le domaine $|z| \leqq 1$, ayant un seul pôle à l'intérieur de ce cercle et satisfaisant, sur $|z| = 1$, à $|f(z)| \leqq |f(0)|$. Nous en déduirons la connaissance de *tous* les nombres de S qui sont inférieurs à θ_∞ et même de tous ceux qui dépassent θ_∞ d'une quantité suffisamment petite. En plus des nombres signalés par Siegel (θ_n et θ'_n), nous verrons que l'ensemble des nombres de S inférieurs à θ_∞ contient un nombre particulier θ'' qui est racine de l'équation

$$1 - z + z^2 - z^4 + 2z^5 - z^6 = 0.$$

Nous verrons que les nombres de S qui sont supérieurs à θ_∞ mais suffisamment voisins de θ_∞, appartiennent à l'une des deux familles suivantes : la première famille est formée des nombres

$$\hat{\theta}_n, \text{ zéro de } \quad \hat{P}_{2p}(z) \equiv \frac{1 + z^{2p}(1+z-z^2)}{1+z} \quad \text{si} \quad n = 2p \qquad (p \geqq 0),$$

$$\text{» de } \quad \hat{P}_{2p+1}(z) \equiv 1 + z^{2p+1}(1+z-z^2) \quad \text{si} \quad n = 2p+1 \qquad (p \geqq 0);$$

la seconde famille est formée des nombres

$$\hat{\theta}'_n, \text{ zéro de } \quad 1 - z^2 - z^n(1+z-z^2) \quad \text{avec} \quad n \geqq 1.$$

([2]) R. Salem, *Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-108.

([3]) C. Siegel, *Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 597-602.

([4]) On peut remarquer que ce sont les seules familles de nombres de S tendant vers θ_∞ que les considérations de notre Mémoire cité mettent en évidence. En effet, θ_∞ étant totalement réel, on a, d'après le théorème 3, sur $|z| = 1$, les deux inégalités

$$1 \leqq |1 + z - z^2| \quad \text{et} \quad |1 - z^2| < |1 + z - z^2|.$$

D'où la formation des deux familles, en opérant comme il a été indiqué dans la démonstration du théorème 1. On verra aisément qu'il n'existe pas, en dehors de ± 1 et $\pm(1 - z^2)$, de polynome $A(z)$ à coefficients entiers, avec $A(0) \neq 0$, qui vérifie $|A(z)| \leqq |1 + z - z^2|$ sur $|z| = 1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Chacune de ces familles est formée de nombres qui vont en décroissant lorsque l'indice n croît.

Ces résultats fournissent une nouvelle démonstration du fait que θ_∞ est le plus petit élément de S'; on voit de plus que c'est un élément isolé de S' ([5]).

2. — Étude de certaines fonctions méromorphes.

Soit une fonction $f(z)$, méromorphe pour $|z| \leqq 1$, réelle pour z réel ([6]), n'ayant dans $|z| \leqq 1$ qu'un pôle $z = \alpha$ qui est simple (nécessairement réel) et satisfait à $0 < \alpha < 1$. Nous supposerons que $|f(z)| \leqq 1$ sur $|z| = 1$ et que $f(0) \geqq 1$. Nous nous proposons d'étudier les coefficients (nécessairement réels) du développement en série de puissances de $f(z)$ au voisinage de l'origine, soit

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots.$$

Établissons d'abord un lemme qui nous sera plusieurs fois utile dans la suite.

Lemme préliminaire. — *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux polynomes, vérifiant* $|B(z)| \leqq |A(z)|$ *sur* $|z| = 1$. *On considère la fonction*

$$\varphi(z) \equiv B(z) f(z) - A(z).$$

Supposons qu'elle ne soit pas identiquement nulle et qu'elle présente, au voisinage de l'origine, le développement en série de puissances

$$\varphi(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots \qquad \textit{avec} \quad k \geqq 1.$$

Alors, dans $|z| < 1$, *le polynome* $A(z)$ *présente au moins* $k - 1$ *zéros. Si ce nombre de zéros est exactement* $k - 1$, *la fonction* $\varphi(z)$ *ne s'annule, dans* $|z| < 1$, *qu'au point* $z = 0$ *et l'on a* $a_k \neq 0$; *si, de plus,* $A(1) \neq 0$, *on a* $A(1)\varphi(z)(z - \alpha) < 0$, *pour* z *réel, satisfaisant à* $0 < z < 1$, *donc* $A(1) a_k > 0$.

Considérons en effet la fonction

$$\varphi_\lambda(z) \equiv B(z) f(z)(z - \alpha) - \lambda A(z)(z - \alpha)$$

où λ est une constante réelle supérieure à 1. Le théorème de Rouché montre que, dans $|z| < 1$, cette fonction présente le même nombre de zéros que $A(z)(z - \alpha)$. Quand λ tend vers 1, il doit y avoir k de ces zéros au moins qui tendent vers zéro. Il en résulte que, dans $|z| < 1$, la fonction $\varphi_\lambda(z)$ doit présenter k zéros au moins, donc $A(z)$ doit présenter $k - 1$ zéros au moins.

([5]) Certains de nos résultats ont été résumés dans une Note (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1551-1553).

([6]) Quelques-unes des propriétés que nous obtiendrons dans la suite subsistent si l'on supprime les hypothèses de réalité.

Si $A(z)$ présente $k-1$ zéro exactement, $\varphi_\lambda(z)$ présente k zéros et ceux-ci tendent tous vers $z=0$ quand λ tend vers 1; il en résulte que, dans $|z|<1$, la fonction $\varphi(z)$ ne s'annule qu'à l'origine qui est un zéro d'ordre k, donc $a_k\neq 0$. D'autre part $\varphi_\lambda(z)$ conserve le signe de $\varphi_\lambda(1)$, c'est-à-dire le signe de $-A(1)$, pour z réel et satisfaisant à $\rho<z<1$, où ρ désigne le plus grand des modules des k zéros de $\varphi_\lambda(z)$; en faisant tendre λ vers 1, on en déduit

$$A(1)\varphi(z)(z-\alpha)<0 \qquad \text{pour} \quad 0<z<1,$$

d'où, en faisant tendre z vers zéro,

$$A(1)\,a_k>0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

En appliquant ce lemme au cas $B(z)\equiv 1$, $A(z)\equiv u_0$, on en déduit que, dans $|z|<1$, la fonction $f(z)-u_0$ ne présente que le zéro $z=0$, que ce zéro est simple et que $u_1>0$.

Étude du cas $u_0>1$.

Considérons la fonction

$$f_1(z)\equiv z\,\frac{u_0 f(z)-1}{f(z)-u_0}.$$

Elle est holomorphe dans $|z|\leqq 1$ et elle vérifie $|f_1(z)|\leqq 1$ sur $|z|=1$. On a donc $|f_1(z)|\leqq 1$ pour $|z|\leqq 1$; en particulier $|f_1(0)|\leqq 1$, soit $\left|\frac{u_0^2-1}{u_1}\right|\leqq 1$, soit encore, compte tenu du signe de u_1,

$$u_1\geqq u_0^2-1,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $f_1(z)\equiv 1$, c'est-à-dire $f(z)\equiv\frac{u_0-z}{1-u_0 z}$.

Ce cas particulier étant écarté, nous appliquerons à la fonction holomorphe et bornée $f_1(z)$ la transformation classique qui conduit à la nouvelle fonction

$$f_2(z)\equiv\frac{1}{z}\,\frac{f_1(z)-f_1(0)}{1-f_1(z)f_1(0)},$$

soit

$$f_2(z)\equiv\frac{1}{z}\,\frac{[u_0u_1z-(u_0^2-1)]f(z)-[u_1z-u_0(u_0^2-1)]}{[u_1-u_0(u_0^2-1)z]f(z)-[u_0u_1-(u_0^2-1)z]}.$$

Dans $|z|\leqq 1$, cette fonction $f_2(z)$ est holomorphe et vérifie $|f_2(z)|\leqq 1$. En appliquant la dernière inégalité au point $z=0$, il vient

$$\left|\frac{u_0u_1^2-u_2(u_0^2-1)}{u_1^2-(u_0^2-1)^2}\right|\leqq 1,$$

qu'on peut encore écrire (puisque le dénominateur est positif)

$$\frac{u_1^2}{u_0+1}+u_0^2-1\leqq u_2\leqq\frac{u_1^2}{u_0-1}-(u_0^2-1),$$

une égalité ne pouvant avoir lieu que si $f_2(z)\equiv\pm 1$.

Suivant un processus classique dans l'étude des fonctions holomorphes bornées, on peut faire sur $f_2(z)$ une transformation analogue à celle qui a été faite sur $f_1(z)$; cela conduit à une fonction $f_3(z) \equiv \frac{1}{z}\,\frac{f_2(z)-f_2(0)}{1-f_2(z)f_2(0)}$, holomorphe et bornée et ainsi de suite. En écrivant que $|f_3(0)| \leqq 1$ et d'une façon générale $|f_n(0)| \leqq 1$, on obtient une suite de doubles inégalités sur les coefficients u_0, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Ces inégalités pourraient être étudiées directement, mais nous les retrouverons plus loin par une autre méthode, les donnant sous une forme qui sera plus pratique dans les applications.

Dans ce qui précède, les inégalités

$$|f_1(z)| \leqq 1, \qquad |f_2(z)| \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad |f_n(z)| \leqq 1, \qquad \ldots,$$

valables pour $|z| \leqq 1$, ont été appliquées systématiquement au point $z = 0$. Appliquons-les maintenant au point $z = \alpha$.

L'inégalité $|f_1(\alpha)| \leqq 1$ donne

$$|\alpha u_0| \leqq 1, \qquad \text{soit} \quad \frac{1}{\alpha} \geqq u_0.$$

L'inégalité $|f_2(\alpha)| \leqq 1$ donne

$$\left| \frac{1}{\alpha}\, \frac{u_0 u_1 \alpha - (u_0^2 - 1)}{u_1 - u_0(u_0^2 - 1)\alpha} \right| \leqq 1,$$

qu'on peut encore écrire (puisque le dénominateur est positif)

$$\left\{ \begin{aligned} & u_0 \alpha^2 + \frac{u_1}{1+u_0}\alpha - 1 \leqq 0, \\ & u_0 \alpha^2 + \frac{u_1}{1-u_0}\alpha + 1 \leqq 0, \end{aligned} \right.$$

soit

$$\tau_2 \leqq \frac{1}{\alpha} \leqq \tau_2^*,$$

où τ_2 est le zéro supérieur à 1 du polynome $D_2(z) \equiv u_0 + \frac{u_1}{1+u_0} z - z^2$ et τ_2^* le zéro supérieur à 1 du polynome $D_2^*(z) \equiv u_0 + \frac{u_1}{1-u_0} z + z^2$.

Et ainsi de suite. La méthode que nous développerons plus loin nous permettra de traduire l'inégalité $|f_n(\alpha)| \leqq 1$ de façon analogue.

Étude du cas $u_0 = 1$.

La construction précédente de la suite $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, s'effondre lorsque $u_0 = 1$, puisqu'elle conduit à $f_1(z) \equiv z$, $f_2(z) \equiv 1$. Cependant des considérations de passage à la limite (7) nous ont amené à considérer la

(7) Introduisons en effet la fonction $g_2(z) \equiv \frac{u_0 f_2(z) - 1}{u_0 - f_2(z)}$; il est équivalent de dire que, dans

fonction

$$g_2(z) \equiv \frac{(z^2+u_1 z-1)f(z)-(z^2-1)}{(z^2-u_1 z-1)-(z^2-1)f(z)}.$$

Il résulte du lemme préliminaire que, dans $|z|<1$, le dénominateur de cette expression ne s'annule qu'en $z=0$ où il présente un zéro double. Mais, comme le montre son développement au voisinage de l'origine, le numérateur de $g_2(z)$ présente un zéro multiple en $z=0$. Par conséquent, la fonction $g_2(z)$ est holomorphe pour $|z|\leqq 1$.

Sur $|z|=1$, l'expression $\lambda(z)\equiv\dfrac{z^2-u_1 z-1}{z^2-1}$ a un module supérieur à 1; son imaginaire conjuguée est $\lambda\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{z^2+u_1 z-1}{z^2-1}$, de sorte que l'on a

$$g_2(z)=\frac{\overline{\lambda(z)}f(z)-1}{\lambda(z)-f(z)}.$$

On en déduit aussitôt que $|g_2(z)|\leqq 1$ sur $|z|=1$. On a donc $|g_2(z)|\leqq 1$ pour $|z|\leqq 1$.

A partir d'ici nous opérerons avec la fonction $g_2(z)$ comme nous opérions tout à l'heure avec la fonction $f_2(z)$. Nous obtiendrons une suite de fonctions holomorphes et bornées que nous désignerons par $g_3(z)$, ..., $g_n(z)$, ... Et nous aurons

$$|g_2(z)|\leqq 1, \qquad |g_3(z)|\leqq 1, \qquad \ldots, \qquad |g_n(z)|\leqq 1, \qquad \ldots, \qquad \text{pour } |z|\leqq 1.$$

En appliquant ces inégalités au point $z=0$, nous obtiendrons les inégalités cherchées entre les coefficients $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. La première d'entre elles est

$$|g_2(0)|\leqq 1 \qquad \text{soit} \qquad \left|\frac{u_1^2-u_2}{u_2}\right|\leqq 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{u_1^2}{2}\leqq u_2.$$

En appliquant les inégalités au point $z=\alpha$, nous obtiendrons les inégalités faisant intervenir α. La première d'entre elles est

$$|g_2(\alpha)|\leqq 1 \qquad \text{soit} \qquad \left|\frac{\alpha^2+u_1\alpha-1}{1-\alpha^2}\right|\leqq 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \alpha^2+\frac{u_1\alpha}{2}-1\leqq 0$$

qu'on peut écrire

$$\tau_2\leqq\frac{1}{\alpha}.$$

Nous avons ainsi mis en évidence l'essentiel de notre idée directrice : pour les fonctions méromorphes $f(z)$ on a des propriétés analogues à celles qu'on

---

$|z|\leqq 1$, $f_2(z)$ est holomorphe et de module au plus égal à 1, ou de dire que $g_2(z)$ jouit de ces propriétés. Or un calcul immédiat conduit à $g_2(z)\equiv\dfrac{(u_0 z^2+u_1 z-u_0)f(z)-(z^2-u_0^2)}{(u_0 z^2-u_1 z-u_0)-(u_0^2 z^2-1)f(z)}$ qui pour $u_0=1$, donne la fonction que nous considérons.

obtient classiquement dans l'étude des fonctions holomorphes bornées quand on étudie le « problème des coefficients »; de plus le pôle α satisfait à une suite d'inégalités faisant intervenir les coefficients.

Avant de reprendre l'étude de la question par une autre méthode, donnons une application des considérations précédentes.

Application. — Recherche des fonctions $f(z)$ dont le développement en série de puissances est à coefficients entiers et commence par les termes $1+z+z^2$.

Considérons l'expression de $g_2(z)$. Son dénominateur $(z^2-z-1)-(z^2-1)f(z)$ a un développement à coefficients entiers dont le premier terme est z^2. Son numérateur $(z^2+z-1)f(z)-(z^2-1)$ a un développement à coefficients entiers dont le premier terme est du troisième degré au moins. Il en résulte que le développement de $g_2(z)$ est à coefficients entiers et ne contient pas de terme constant. Or la fonction $g_2(z)$ est holomorphe et de module au plus égal à 1 dans $|z|\leq 1$. Par conséquent $g_2(z)\equiv \pm z^n$ avec $n\geq 1$, ou $g_2(z)\equiv 0$, ce qui entraîne

$$f(z)\equiv\frac{1-z^2\pm z^n(1+z-z^2)}{1-z-z^2\pm z^n(1-z^2)} \qquad \text{ou} \qquad f(z)\equiv\frac{1-z^2}{1-z-z^2}.$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante [8] :

Les seuls nombres θ de l'ensemble S dont les fractions rationnelles associées $\frac{P}{Q}$ ont un développement qui commence par $1+z+z^2$ sont les nombres θ'_n et $\hat{\theta}'_n$.

3. — Formation directe des inégalités précédentes.

La méthode que nous venons de suivre conduit à une expression explicite des premières inégalités indiquées, mais ne donne pas les suivantes sous une forme qui soit d'un maniement commode dans les applications. Aussi allons-nous reprendre entièrement la question d'une toute autre façon, en nous inspirant de l'étude classique du « problème des coefficients » pour une fonction holomorphe bornée [9]. Nous partons toujours de la fonction méromorphe $f(z)$ satisfaisant aux conditions qui ont été indiquées dans la section précédente et qui présente comme développement au voisinage de l'origine

$$f(z)=u_0+u_1z+\ldots+u_nz^n+\ldots.$$

Définition des polynomes D_n et E_n.

Étant donné l'entier positif n, nous nous proposons de rechercher s'il existe un polynome $E_n(z)\equiv 1+\mu_1 z+\mu_2 z^2+\ldots+\mu_n z^n$ tel que, si l'on pose

---

[8] Nous avons déjà obtenu ce résultat [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* (*loc cit.*), p. 119-120].

[9] Sur cette question on pourra consulter deux Mémoires de Schur (*J. reine ang. Math.*, t. 147, 1917, p. 205-232; t. 148, 1918, p. 122-145).

$D_n(z) \equiv - z^n E_n\left(\frac{1}{z}\right)$, la fraction rationnelle $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ ait, au voisinage de l'origine, un développement en série de puissances qui commence par

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}.$$

Nous exprimerons cette propriété en écrivant que

$$(u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}) E_n(z) - D_n(z)$$

est divisible par z^n. Nous obtiendrons ainsi pour déterminer les inconnues μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n un système de n équations linéaires. Pour rechercher si nous avons affaire à un système de Cramer, nous formerons le système homogène associé; or on voit immédiatement que celui-ci exprime que

$$(u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1})(\mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots + \mu_n z^n) + (\mu_n + \mu_{n-1} z + \ldots + \mu_1 z^{n-1})$$

est divisible par z^n. Supposons que le système homogène ait une solution autre que la solution banale; cette solution peut toujours être supposée réelle; pour cette solution on aurait $\mu_p = 0$ pour $p \leqq h$ et $\mu_{h+1} \neq 0$, où h est un certain entier positif ou nul; cela entraînerait $\mu_p = 0$ pour $p \geqq n - h$ et $\mu_{n-h-1} \neq 0$, donc $n \geqq 2h + 2$; le polynome

$$\begin{aligned}&(u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}) \\ &\quad \times (\mu_{h+1} + \mu_{h+2} z + \ldots + \mu_{n-h-1} z^{n-2h-2}) + (\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2})\end{aligned}$$

serait divisible par z^{n-h-1}, donc la fonction

$$\psi(z) \equiv f(z)(\mu_{h+1} + \mu_{h+2} z + \ldots + \mu_{n-h-1} z^{n-2h-2}) + (\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2})$$

présenterait à l'origine un zéro d'ordre $n - h - 1$ au moins.

Appliquons à cette fonction le lemme préliminaire. Nous distinguerons plusieurs cas :

a. $\psi(z) \not\equiv 0$ et $n > 2h + 2$. Le polynome $\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2}$ doit présenter $n - h - 2$ zéros à l'intérieur du cercle unité. Or ce polynome présente en tout $n - 2h - 2$ zéros dont le produit des modules est

$$\left|\frac{\mu_{n-h-1}}{\mu_{h+1}}\right| = u_0 \geqq 1,$$

donc au plus $n - 2h - 3$ zéros à l'intérieur du cercle unité. Il y a donc contradiction

b. $\psi(z) \not\equiv 0$ et $n = 2h + 2$. On a alors

$$\psi(z) \equiv \mu_{h+1}[f(z) + 1],$$

expression qui ne s'annule pas à l'origine. Ce cas est donc impossible.

c. $\psi(z) \equiv 0$. Alors

$$f(z) \equiv - \frac{\mu_{n-h-1} + \mu_{n-h-2} z + \ldots + \mu_{h+1} z^{n-2h-2}}{\mu_{h+1} + \mu_{h+2} z + \ldots + \mu_{n-h-1} z^{n-2h-2}}.$$

serait une fraction rationnelle de degré $s \leqq n-2$, ayant un module égal à 1 sur $|z|=1$. C'est le seul cas où le système homogène peut avoir une solution non banale, donc le seul cas où le système initial peut ne pas être un système de Cramer.

On précise aisément ce dernier point si l'on met la fraction rationnelle $f(z)$ sous la forme irréductible $\frac{U(z)}{V(z)}$ de degré s avec $V(0)=1$; on sait que

$$U(z) \equiv \varepsilon z^s V\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Le système initial est Cramérien si $n \leqq s+1$; il est encore Cramérien pour $n=s+2$ si de plus $\varepsilon=+1$.

Pour simplifier les énoncés qui vont suivre, nous appellerons *cas* B celui où $f(z)$ est une fraction rationnelle ayant un module égal à 1 sur $|z|=1$; *cas* A celui où cette propriété n'est pas réalisée.

Nous pouvons maintenant résumer nos résultats :

LEMME 1. — *Dans le cas* A, *les polynomes* $D_n(z)$ *et* $E_n(z)$ *existent et sont uniques pour toute valeur de l'entier positif* n. *Dans le cas* B, *si* $f(1)=+1$, *il en est de même pour* $n \leqq s+2$; *on vérifie alors que*

$$D_{s+1}(z) \equiv (1-z)\,U(z), \qquad D_{s+2}(z) \equiv (1-z^2)\,U(z),$$
$$E_{s+1}(z) \equiv (1-z)\,V(z), \qquad E_{s+2}(z) \equiv (1-z^2)\,V(z).$$

Dans le cas B, *si* $f(1)=-1$, *il en est de même pour* $n \leqq s+1$; *on vérifie alors que*

$$D_s(z) \equiv U(z), \qquad D_{s+1}(z) \equiv (1+z)\,U(z),$$
$$E_s(z) \equiv V(z), \qquad E_{s+1}(z) \equiv (1+z)\,V(z).$$

Un calcul immédiat donne dans tous les cas

$$D_1(z) \equiv u_0 - z, \qquad D_2(z) \equiv u_0 + \frac{u_1}{1+u_0} z - z^2,$$

$$E_1(z) \equiv 1 - u_0 z, \qquad E_2(z) \equiv 1 - \frac{u_1}{1+u_0} z - u_0 z^2.$$

DÉFINITION DES POLYNOMES $D_n^\star$ ET $E_n^\star$.

Étant donné l'entier positif n, nous nous proposons de rechercher s'il existe un polynome $E_n^\star(z) \equiv 1 + \mu_1^\star z + \mu_2^\star z^2 + \ldots + \mu_n^\star z^n$ tel que, si l'on pose $D_n^\star(z) \equiv z^n E_n^\star\left(\frac{1}{z}\right)$, la fraction rationnelle $\frac{D_n^\star(z)}{E_n^\star(z)}$ ait, au voisinage de l'origine un développement en série de puissances qui commence par

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}.$$

Comme ci-dessus, nous formerons le système d'équations linéaires auquel doivent satisfaire $\mu_1^\star, \mu_2^\star, \ldots, \mu_n^\star$, puis le système homogène associé; ce dernier exprime que la fonction

$$\psi^\star(z) \equiv f(z)\,(\mu_{h+1}^\star + \mu_{h+2}^\star z + \ldots + \mu_{n-h-1}^\star z^{n-2h-2}) - (\mu_{n-h-1}^\star + \mu_{n-h-2}^\star z + \ldots + \mu_{h+1}^\star z^{n-2h-2})$$

présente à l'origine un zéro d'ordre $n-h-1 \geqq h+1$ au moins. Nous distinguerons encore trois cas :

a. $\psi^\star(z) \not\equiv 0$ et $n > 2h+2$. On est conduit à une contradiction comme précédemment.

b. $\psi^\star(z) \not\equiv 0$ et $n = 2h+2$. On a alors

$$\psi^\star(z) \equiv \mu_{h+1}^\star [f(z) - 1].$$

Si $u_0 \neq 1$, cette expression ne s'annule pas à l'origine; donc ce cas est impossible. Si $u_0 = 1$, cette expression possède un zéro simple à l'origine; ce cas peut donc se présenter lorsque $h = 0$, $n = 2$; mais alors, on voit directement que le système non homogène est impossible.

c. $\psi^\star(z) \equiv 0$. Alors

$$f(z) \equiv \frac{\mu_{n-h-1}^\star + \mu_{n-h-2}^\star z + \ldots + \mu_{h+1}^\star z^{n-2h-2}}{\mu_{h+1}^\star + \mu_{h+2}^\star z + \ldots + \mu_{n-h-1}^\star z^{n-2h-2}}$$

serait une fraction rationnelle de degré $s \leqq n-2$, ayant un module égal à 1 sur $|z| = 1$. C'est un cas où le système homogène peut avoir une solution non banale, donc un cas où le système initial peut ne pas être un système de Cramer. On précise comme plus haut que le système est encore Cramérien pour $n = s+2$, si de plus $\varepsilon = -1$.

Résumons ces résultats :

Lemme 2. — *Dans le cas* A, *les polynomes* $D_n^\star(z)$ *et* $E_n^\star(z)$ *existent et sont uniques pour toute valeur de l'entier positif* $n \neq 2$. *Dans le cas* B, *si* $f(1) = -1$, *il en est de même pour* $n \leqq s+2$; *on vérifie alors que :*

$$D_{s+1}^\star(z) \equiv (1-z)\,U(z), \qquad D_{s+2}^\star(z) \equiv (1-z^2)\,U(z),$$
$$E_{s+1}^\star(z) \equiv (1-z)\,V(z), \qquad E_{s+2}^\star(z) \equiv (1-z^2)\,V(z).$$

Dans le cas B *si* $f(1) = +1$, *il en est de même pour* $n \leqq s+1$; *on vérifie alors que :*

$$D_s^\star(z) \equiv U(z), \qquad D_{s+1}^\star(z) \equiv (1+z)\,U(z),$$
$$E_s^\star(z) \equiv V(z), \qquad E_{s+1}^\star(z) \equiv (1+z)\,V(z).$$

Ces résultats subsistent pour $n = 2$ *si* $u_0 \neq 1$. *Mais si* $u_0 = 1$, *les polynomes* $D_2^\star(z)$ *et* $E_2^\star(z)$ *n'existent pas.*

Un calcul immédiat donne

$$D_1^\star(z) \equiv u_0 + z, \qquad D_2^\star(z) \equiv u_0 + \frac{u_1}{1-u_0} z + z^2,$$

$$E_1^\star(z) \equiv 1 + u_0 z, \qquad E_2^\star(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{1-u_0} z + u_0 z^2.$$

Complétons les résultats énoncés dans les lemmes 1 et 2 en recherchant ce qui arrive dans le cas B pour $n \geqq s+2$. La méthode que nous allons suivre s'appliquerait encore à $n=s+1$, mais elle n'apporterait rien de nouveau. Si nous imposons toujours aux polynomes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ les propriétés indiquées au début de cette section, on voit que

$$U(z)\,E_n(z) - V(z)\,D_n(z)$$

est un polynome divisible par z^n. Or, ce polynome se reproduit au signe près lorsqu'on change z en $\frac{1}{z}$ et qu'on multiplie l'expression obtenue par z^{n+s}. On a donc

$$U(z)\,E_n(z) - V(z)\,D_n(z) \equiv 0.$$

Il en résulte que

$$D_n(z) \equiv K(z)\,U(z)$$
$$E_n(z) \equiv K(z)\,V(z)$$

où $K(z)$ est un polynome de degré $n-s$ vérifiant

$$K(z) \equiv -f(1)\,z^{n-s}K\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad K(0)=1.$$

Par conséquent, sauf si $n=s+2$ et $f(1)=+1$ (cas déjà vu dans le lemme 1), il existe une infinité de couples de polynomes $D_n(z)$ et $E_n(z)$; et pour chacun d'eux on a

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} \equiv \frac{U(z)}{V(z)}.$$

On développerait des considérations analogues pour $D_n^\star(z)$ et $E_n^\star(z)$.

Propriétés fondamentales des polynomes D_n, E_n, $D_n^\star$, $E_n^\star$.

Dans le développement en série de puissances de $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$, nous connaissons les n premiers termes; nous désignerons par w_n le coefficient du terme suivant, de sorte que

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1}z^{n-1} + w_n z^n + \ldots.$$

Nous définirons de façon analogue $w_n^\star$; on aura

$$\frac{D_n^\star(z)}{E_n^\star(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1}z^{n-1} + w_n^\star z^n + \ldots.$$

Un calcul immédiat donne

$$w_1 = u_0^2 - 1, \qquad w_2 = u_0^2 - 1 + \frac{u_1^2}{1+u_0},$$
$$w_1^\star = 1 - u_0^2, \qquad w_2^\star = 1 - u_0^2 - \frac{u_1^2}{1-u_0} \qquad \text{si} \quad u_0 \neq 1.$$

Dans le cas A, les w_n et $w_n^\star$ sont bien définis pour $n > 2$.

Dans le cas B, ils sont bien définis pour $2 < n \leqq s+1$; on a en particulier

$$w_s = u_s \quad \text{si} \quad f(1) = -1, \qquad w_s^\star = u_s \quad \text{si} \quad f(1) = +1, \qquad w_{s+1} = w_{s+1}^\star = u_{s+1}$$

et, pour $n \geqq s+2$, quoiqu'il y ait une certaine indétermination sur les polynomes D_n, E_n, $D_n^\star$, $E_n^\star$, nous avons vu que

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} \equiv f(z) \equiv \frac{D_n^\star(z)}{E_n^\star(z)},$$

d'où il résulte que

$$w_n = w_n^\star = u_n.$$

Dans l'étude qui va suivre nous ne parlerons des polynomes D_n, E_n, $D_n^\star$, $E_n^\star$, que lorsqu'ils existent et sont définis sans ambiguïté (*voir* lemmes 1 et 2).

Considérons la fonction

$$E_n(z) f(z) - D_n(z) = (u_n - w_n) z^n + \ldots.$$

Elle ne peut être identiquement nulle que si $f(z) \equiv \frac{D_n(z)}{E_n(z)}$, c'est-à-dire (*voir* lemme 1) si l'on est dans le cas B avec $s \leqq n$ lorsque $f(1) = -1$, avec $s \leqq n-1$ lorsque $f(1) = +1$. Sinon, le lemme préliminaire montre que $D_n(z)$ doit présenter dans $|z| < 1$, au moins $n-1$ zéros.

Mais, d'autre part, il résulte de la définition de $D_n(z)$ que le module du produit de ses zéros est égal à $u_0 \geqq 1$. Par conséquent, sauf peut-être pour $n = 1$, le polynome $D_n(z)$ présente $n-1$ zéros à l'intérieur du cercle unité et un zéro $z = \tau_n$ extérieur au cercle unité. De plus, τ_n ne peut être négatif, sans quoi la fonction $\frac{D_n(-z)}{E_n(-z)} = u_0 - u_1 z + \ldots$ satisferait à toutes les conditions imposées aux fonctions $f(z)$ au début de la section 2 $\left(\text{le pôle intérieur au cercle unité étant } z = -\frac{1}{\tau_n}\right)$ d'où il résulterait $-u_1 > 0$, ce qui est faux.

On peut développer des considérations analogues sur le polynome $D_n^\star(z)$, ce qui conduit au lemme suivant :

Lemme 3. — *Sauf peut-être pour $n = 1$, les polynomes $D_n(z)$ et $D_n^\star(z)$ ont chacun un zéro et un seul extérieur au cercle unité. Ces zéros τ_n et $\tau_n^\star$ sont supérieurs à 1. Dans le cas A les autres zéros sont intérieurs au cercle unité; il en est encore ainsi dans le cas B lorsque $n \leqq s$.*

Dans ces conditions, le polynome $E_n(z)$ ne présente dans $|z| < 1$ que le zéro $\frac{1}{\tau_n}$. Puisque $E_n(0) = 1$, on a donc $E_n(1) < 0$, donc $D_n(1) > 0$. Étant toujours écarté le cas où $E_n(z) f(z) - D_n(z) \equiv 0$, le lemme préliminaire nous apprend alors que

$$E_n(z) f(z)(z-\alpha) - D_n(z)(z-\alpha) < 0 \tag{1}$$

pour z réel satisfaisant à $0 < z < 1$ et, en particulier, que

$$u_n - w_n > 0.$$

On peut développer des considérations analogues avec les polynomes $D_n^\star(z)$ et $E_n^\star(z)$, ce qui conduit au théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Dans le cas* A, *on a, si* $u_0 \neq 1$,

$$w_1 < u_1,$$
$$w_n < u_n < w_n^\star \qquad pour \quad n \geqq 2,$$

tandis que si $u_0 = 1$, *on a*

$$0 < u_1,$$
$$w_2 < u_2,$$
$$w_n < u_n < w_n^\star \qquad pour \quad n \geqq 3.$$

Dans le cas B, *il en est de même pour* $n < s$; *on a ensuite*

$$w_s = u_s < w_s^\star \qquad si \quad f(1) = -1,$$
$$w_s < u_s = w_s^\star \qquad si \quad f(1) = +1$$

et enfin

$$w_n = u_n = w_n^\star \qquad pour \quad n \geqq s + 1.$$

Nous montrerons plus loin que ces inégalités sont celles que nous obtenions sous les formes $|f_n(0)| < 1$ ou $|g_n(0)| < 1$ dans l'étude de la section 2 ([10]).

Nous avons déjà remarqué que le module du produit des zéros de $D_n(z)$ est égal à $u_0 \geqq 1$. Or l'un de ces zéros est τ_n et tous les autres sont de module inférieur à 1. Il en résulte que tous les zéros ont un module supérieur ou égal à $\frac{1}{\tau_n}$, donc que $D_n\left(\frac{1}{\tau_n}\right) \geqq 0$, puisque $D_n(0) = u_0 > 0$. En faisant $z = \frac{1}{\tau_n}$ dans l'inégalité (1), il vient

$$\frac{1}{\tau_n} - \alpha > 0.$$

On opérerait de façon analogue avec $D_n^\star(z)$, $E_n^\star(z)$ et $\tau_n^\star$. On parvient ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Dans le cas* A, *on a, si* $u_0 \neq 1$,

$$\tau_1 < \frac{1}{\alpha},$$
$$\tau_n < \frac{1}{\alpha} < \tau_n^\star \qquad pour \quad n \geqq 2,$$

([10]) Ces inégalités ne font intervenir que les coefficients u_n du développement de $f(z)$. La résolution des systèmes d'équations donnant les polynomes D_n, E_n, $D_n^\star$ et $E_n^\star$ permet, d'une manière analogue à celle employée dans le cas des fonctions holomorphes bornées dans le cercle $|z| < 1$, d'exprimer le théorème 1 sous la forme d'une suite d'inégalités portant sur des déterminants dont les éléments sont les coefficients u_n.

tandis que si $u_0 = 1$ *on a*

$$\tau_2 < \frac{1}{\alpha},$$

$$\tau_n < \frac{1}{\alpha} < \tau_n^\star \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 3.$$

Dans le cas B *il en est de même pour* $n < s$*; on a ensuite*

$$\tau_s = \frac{1}{\alpha} < \tau_s^\star \qquad \textit{si} \quad f(1) = -1,$$

$$\tau_s < \frac{1}{\alpha} = \tau_s^\star \qquad \textit{si} \quad f(1) = +1,$$

et enfin

$$\tau_{s+1} = \frac{1}{\alpha} = \tau_{s+1}^\star.$$

Nous verrons plus loin que ces inégalités sont celles que nous avons obtenues sous les formes $|f_n(\alpha)| < 1$ ou $|g_n(\alpha)| < 1$ dans l'étude de la section 2.

Autres propriétés des polynomes D_n, E_n, $D_n^\star$, $E_n^\star$.

Il résulte immédiatement de nos définitions que

$$\frac{D_n^\star(z)}{E_n^\star(z)} - \frac{D_n(z)}{E_n(z)} = (w_n^\star - w_n)\, z^n + \ldots,$$

d'où

$$D_n^\star(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_n^\star(z) \equiv (w_n^\star - w_n)\, z^n + \ldots,$$

En remarquant que le premier membre est un polynome qui n'est pas altéré par le changement de z en $\frac{1}{z}$ suivi de la multiplication par z^{2n}, on en déduit

$$(1) \qquad D_n^\star(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_n^\star(z) \equiv (w_n^\star - w_n)\, z^n.$$

Cette identité montre, en particulier, que les polynomes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ sont premiers entre eux et qu'il en est de même des polynomes $D_n^\star(z)$ et $E_n^\star(z)$.

On établira par un raisonnement tout à fait analogue les identités suivantes :

$$(2) \qquad D_{n+1}(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_{n+1}(z) \equiv (u_n - w_n)\, z^n (1 - z),$$

$$(3) \qquad D_{n+1}(z)\, E_n^\star(z) - D_n^\star(z)\, E_{n+1}(z) \equiv (u_n - w_n^\star)\, z^n (1 + z),$$

$$(4) \qquad D_{n+1}^\star(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_{n+1}^\star(z) \equiv (u_n - w_n)\, z^n (1 + z),$$

$$(5) \qquad D_{n+1}^\star(z)\, E_n^\star(z) - D_n^\star(z)\, E_{n+1}^\star(z) \equiv (u_n - w_n^\star)\, z^n (1 - z),$$

et encore

$$(6) \qquad D_{n+2}(z)\, E_n(z) - D_n(z)\, E_{n+2}(z) \equiv (u_n - w_n)\, z^n (1 - z^2),$$

$$(7) \qquad D_{n+2}^\star(z)\, E_n^\star(z) - D_n^\star(z)\, E_{n+2}^\star(z) \equiv (u_n - w_n^\star)\, z^n (1 - z^2).$$

Toutes ces identités ne sont d'ailleurs pas indépendantes et certaines peuvent se déduire des autres par un simple calcul algébrique. Ces identités en entraînent encore d'autres qui peuvent être utiles. Par exemple, de (1), (2) et (3) d'une part, de (1), (4) et (5) d'autre part, on tire la proposition suivante :

LEMME 4. — *Dans le cas* A *pour* $n \geqq 1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $n \geqq 3$ *si* $u_0 = 1$, *dans le cas* B *pour* $1 \leqq n \leqq s$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $3 \leqq n \leqq s$ *si* $u_0 = 1$, *on a*

$$D_{n+1}(z) \equiv \frac{w_n^\star - u_n}{w_n^\star - w_n}(1+z)\,D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^\star - w_n}(1-z)\,D_n^\star(z),$$

$$E_{n+1}(z) \equiv \frac{w_n^\star - u_n}{w_n^\star - w_n}(1+z)\,E_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^\star - w_n}(1-z)\,E_n^\star(z),$$

$$D_{n+1}^\star(z) \equiv \frac{w_n^\star - u_n}{w_n^\star - w_n}(1-z)\,D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^\star - w_n}(1+z)\,D_n^\star(z),$$

$$E_{n+1}^\star(z) \equiv \frac{w_n^\star - u_n}{w_n^\star - w_n}(1-z)\,E_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^\star - w_n}(1+z)\,E_n^\star(z).$$

De même, des relations (2) et (6) d'une part, (5) et (7) d'autre part, on tire la proposition suivante :

LEMME 5. — *Dans le cas* A *pour* $n \geqq 1$ *et dans le cas* B *pour* $1 \leqq n \leqq s-1$, *on a*

$$D_{n+2}(z) \equiv (1+z)\,D_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n}\,z\,D_n(z),$$

$$E_{n+2}(z) \equiv (1+z)\,E_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n}\,z\,E_n(z).$$

Dans le cas A *pour* $n \geqq 1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $n \geqq 3$ *si* $u_0 = 1$, *dans le cas* B *pour* $1 \leqq n \leqq s-1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $3 \leqq n \leqq s-1$ *si* $u_0 = 1$, *on a*

$$D_{n+2}^\star(z) \equiv (1+z)\,D_{n+1}^\star(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}^\star}{u_n - w_n^\star}\,z\,D_n^\star(z),$$

$$E_{n+2}^\star(z) \equiv (1+z)\,E_{n+1}^\star(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}^\star}{u_n - w_n^\star}\,z\,E_n^\star(z).$$

De l'identité (1) et du lemme 4 on tire encore

$$w_{n+1}^\star - w_{n+1} = \frac{4(w_n^\star - u_n)(u_n - w_n)}{w_n^\star - w_n}, \tag{8}$$

d'où il résulte aussitôt que

$$w_{n+1}^\star - w_{n+1} \leqq w_n^\star - w_n;$$

autrement dit, la suite de terme général $w_n^\star - w_n$ est monotone décroissante. Dans le cas A, on a affaire à une suite infinie dont le terme général est positif; elle tend donc vers une limite positive ou nulle; de plus, en écrivant la relation (8) sous la forme

$$4\left(u_n - \frac{w_n + w_n^\star}{2}\right)^2 = (w_n^\star - w_n)\left[(w_n^\star - w_n) - (w_{n+1}^\star - w_{n+1})\right],$$

on voit immédiatement que la série $\sum\left(u_n - \frac{w_n + w_n^\star}{2}\right)^2$ est convergente.

Les propriétés précédentes permettent aussi d'étudier les suites de termes généraux τ_n et $\tau_n^\star$. En effet, si nous faisons $z=\tau_n$ dans la première identité du lemme 4, il vient

$$D_{n+1}(\tau_n)=\frac{u_n-w_n}{w_n^\star-w_n}(1-\tau_n)D_n^\star(\tau_n),$$

quantité qui est positive puisque $\tau_n<\tau_n^\star$ et $D_n^\star(+\infty)=+\infty$; donc $D_{n+1}(\tau_n)>0$, ce qui entraîne $\tau_n<\tau_{n+1}$ puisque $D_{n+1}(+\infty)=-\infty$. La suite des τ_n est croissante. On démontrerait d'une façon analogue que la suite des $\tau_n^\star$ est décroissante. Dans le cas A, nous avons affaire à des suites infinies; et alors

$$\tau_n\to\tau\leqq\frac{1}{\alpha},$$

$$\tau_n^\star\to\tau^\star\geqq\frac{1}{\alpha}.$$

Nous allons établir que $\tau=\tau^\star=\frac{1}{\alpha}\cdot$ En effet, posons

$$\varphi_n(z)\equiv\left[\frac{D_n(z)}{E_n(z)}-f(z)\right](z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\tau_n}\right).$$

Les fonctions holomorphes $\frac{\varphi_n(z)}{z^n}$ sont uniformément bornées sur $|z|=1$, donc aussi dans le cercle unité. Il en résulte que $\varphi_n(\alpha)$ tend vers zéro. On en déduit, puisque $f(z)$ présente un pôle simple en $z=\alpha$, que $\frac{1}{\tau_n}\to\alpha$. On démontrerait de même la proposition suivante : dans le cas A, la fraction rationnelle $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$, qui a un pôle et un seul $z=\frac{1}{\tau_n}$ dans $|z|\leqq 1$, et qui vérifie $\left|\frac{D_n(z)}{E_n(z)}\right|=1$ sur $|z|=1$, tend uniformément vers $f(z)$ dans tout domaine fermé ne contenant pas $z=\alpha$ et intérieur au cercle unité.

Remarquons enfin que les identités établies ci-dessus entraînent des propriétés remarquables pour $D_n(z)$, $E_n(z)$, $D_n^\star(z)$ et $E_n^\star(z)$ sur $|z|=1$ car on a alors

$$E_n(z)=-z^n\overline{D_n(z)} \qquad \text{et} \qquad E_n^\star(z)=z^n\overline{D_n^\star(z)}.$$

L'identité (1), par exemple, donne

$$D_n^\star(z)\overline{D_n(z)}+D_n(z)\overline{D_n^\star(z)}=w_n-w_n^\star.$$

Si β et $\beta^\star$ sont des nombres réels, on a donc sur $|z|=1$

$$|\beta D_n+\beta^\star D_n^\star|^2=\beta^2|D_n|^2+\beta^{\star 2}|D_n^\star|^2+\beta\beta^\star(w_n-w_n^\star)$$

et de même

$$|\beta E_n+\beta^\star E_n^\star|^2=|\beta D_n-\beta^\star D_n^\star|^2=\beta^2|D_n|^2+\beta^{\star 2}|D_n^\star|^2-\beta\beta^\star(w_n-w_n^\star),$$

d'où

$$|\beta E_n+\beta^\star E_n^\star|^2-|\beta D_n+\beta^\star D_n^\star|^2=2\beta\beta^\star(w_n^\star-w_n).$$

Il en résulte, en particulier, que les fractions rationnelles

$$\frac{\beta\, D_n(z) + \beta^\star D_n^\star(z)}{\beta\, E_n(z) + \beta^\star E_n^\star(z)},$$

dont le développement commence par $u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1}$ ont, sur $|z| = 1$, un module inférieur à 1 si β et $\beta^\star$ sont positifs.

Pour terminer, montrons que les inégalités données par les théorèmes 1 et 2 sont celles que nous avions obtenues dans la section 2.

Plaçons-nous d'abord dans le cas $u_0 > 1$. On vérifie immédiatement que

$$\frac{1}{f_1(z)} \equiv \frac{(E_1^\star + E_1)f - (D_1^\star + D_1)}{(E_1^\star - E_1)f - (D_1^\star - D_1)}.$$

Nous allons établir que, pour $n \geqq 2$, on a

$$f_n(z) \equiv \frac{(E_n^\star + E_n)f - (D_n^\star + D_n)}{(E_n^\star - E_n)f - (D_n^\star - D_n)}. \tag{9}$$

La démonstration se fait par récurrence en utilisant la relation

$$f_{n+1}(z) \equiv \frac{1}{z}\,\frac{f_n(z) - f_n(0)}{1 - f_n(z) f_n(0)} \tag{10}$$

et en remarquant que cette relation demeure vraie si l'on change $f_n(z)$ en $\frac{1}{f_n(z)}$ et $f_n(0)$ en $\frac{1}{f_n(0)}$, de sorte que l'on passe de $\frac{1}{f_1(z)}$ à $f_2(z)$ comme l'on passe de $f_n(z)$ à $f_{n+1}(z)$. Il suffit donc de faire le calcul pour le passage de n à $n+1$. Dans la formule (9) calculons $f_n(0)$; à cet effet, nous utiliserons les développements

$$E_n(z) f(z) - D_n(z) = (u_n - w_n) z^n + \ldots,$$
$$E_n^\star(z) f(z) - D_n^\star(z) = (u_n - w_n^\star) z^n + \ldots;$$

il vient immédiatement $f_n(0) = \frac{2u_n - w_n - w_n^\star}{w_n - w_n^\star}$. En utilisant la formule (10) on en déduit alors, grâce au lemme 4,

$$f_{n+1}(z) \equiv \frac{(E_{n+1}^\star + E_{n+1})f - (D_{n+1}^\star + D_{n+1})}{(E_{n+1}^\star - E_{n+1})f - (D_{n+1}^\star - D_{n+1})},$$

ce qui achève la démonstration.

Recherchons ce que devient cette propriété dans le cas $u_0 = 1$. On vérifie immédiatement que

$$g_2(z) \equiv \frac{\left(\frac{u_1}{2} z - E_2\right) f - \left(\frac{u_1}{2} z - D_2\right)}{\left(\frac{u_1}{2} z + E_2\right) f - \left(\frac{u_1}{2} z + D_2\right)}.$$

On en tire

$$g_2(0) = \frac{\frac{u_1^2}{2} - (u_2 - w_2)}{\frac{u_1^2}{2} + (u_2 - w_2)}.$$

Puis on calcule

$$g_3(z) \equiv \frac{1}{z}\,\frac{g_2(z)-g_2(0)}{1-g_2(z)g_2(0)}.$$

Grâce aux relations

$$D_3(z) \equiv (1+z)\,D_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1-z),$$

$$E_3(z) \equiv (1+z)E_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1-z),$$

tirées du lemme 5, et aux relations

$$D_3^\star(z) \equiv (1-z)\,D_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1+z),$$

$$E_3^\star(z) \equiv (1-z)E_2(z) - \frac{u_2-w_2}{u_1}z(1+z),$$

qu'on déduit facilement de (4) et (7), ce calcul conduit à

$$g_3(z) \equiv \frac{(E_3^\star+E_3)f-(D_3^\star+D_3)}{(E_3^\star-E_3)f-(D_3^\star-D_3)}.$$

On en déduit comme ci-dessus que, pour $n \geqq 3$,

$$g_n(z) \equiv \frac{(E_n^\star+E_n)f-(D_n^\star+D_n)}{(E_n^\star-E_n)f-(D_n^\star-D_n)}. \tag{9 bis}$$

Résumons ces résultats :

Lemme 6. — *Dans le cas* A *pour* $n \geqq 2$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $n \geqq 3$ *si* $u_0 = 1$, *dans le cas* B *pour* $2 \leqq n \leqq s+1$ *si* $u_0 \neq 1$ *et seulement pour* $3 \leqq n \leqq s+1$ *si* $u_0 = 1$, *on a*

$$f_n(z) \quad \text{ou} \quad g_n(z) \equiv \frac{[E_n^\star(z)+E_n(z)]f(z)-[D_n^\star(z)+D_n(z)]}{[E_n^\star(z)-E_n(z)]f(z)-[D_n^\star(z)-D_n(z)]}.$$

Si $u_0 \neq 1$, *on a de plus*

$$\frac{1}{f_1(z)} \equiv \frac{[E_1^\star(z)+E_1(z)]f(z)-[D_1^\star(z)+D_1(z)]}{[E_1^\star(z)-E_1(z)]f(z)-[D_1^\star(z)-D_1(z)]},$$

tandis que si $u_0 = 1$, *on a*

$$g_2(z) \equiv \frac{\left[\frac{u_1}{2}z - E_2(z)\right]f(z) - \left[\frac{u_1}{2}z - D_2(z)\right]}{\left[\frac{u_1}{2}z + E_2(z)\right]f(z) - \left[\frac{u_1}{2}z + D_2(z)\right]}.$$

L'étude de la section 2 nous a conduit aux propriétés suivantes :

Dans le cas A *pour* $n \geqq 3$, *dans le cas* B *pour* $3 \leqq n \leqq s+1$, *on a*

$$|f_n(z)| \leqq 1 \quad \text{ou} \quad |g_n(z)| \leqq 1 \quad \text{quand} \quad |z| \leqq 1.$$

Ces résultats subsistent pour $n = 1, 2$ *si* $u_0 \neq 1$. *Si* $u_0 = 1$, *on a*

$$|g_2(z)| \leqq 1 \quad \textit{quand} \quad |z| \leqq 1.$$

En appliquant ces inégalités au point $z = 0$, on retrouve le théorème 1; en les appliquant au point $z = \alpha$, on retrouve le théorème 2.

4. — Application à l'étude des petits éléments de l'ensemble S.

Nous allons appliquer les résultats précédents aux fonctions $f(z)$ que sont les fractions rationnelles $\frac{P(z)}{Q(z)}$ associées aux nombres θ de l'ensemble S. Nous sommes dans le cas B; nous avons

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

où $u_0, u_1, \ldots$ sont des entiers et où le pôle intérieur au cercle est $\alpha = \frac{1}{\theta}$.

On a $D_1(z) \equiv u_0 - z$, donc $\tau_1 = u_0$; il résulte du théorème 2 que $u_0 \leqq \theta$. *Pour les nombres* θ *inférieurs à* 2, auxquels nous nous limiterons, on a donc ([11]) $u_0 = 1$.

Dans ces conditions, nous avons déjà vu que $D_2(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{2} z - z^2$ et $w_2 = \frac{u_1^2}{2}$. D'après le théorème 2, nous devons avoir $\tau_2 < 2$; il en résulte que $D_2(2) < 0$, soit $u_1 < 3$; les seuls cas possibles sont donc $u_1 = 1$ et $u_1 = 2$.

D'après le lemme 5, on a alors

$$D_3(z) \equiv (1+z)\left(1 + \frac{u_1}{2} z - z^2\right) - z \frac{u_2 - \frac{u_1^2}{2}}{u_1}(1 - z).$$

Si $u_1 = 2$, ce qui exige $u_2 \geqq w_2 = 2$ en vertu du théorème 1, on a

$$D_3(z) \equiv (1+z)(1+z-z^2) - z\frac{u_2 - 2}{2}(1-z);$$

ce polynome présente un zéro et un seul τ_3 dans l'intervalle $1 < z < +\infty$, et pour $u_2 \geqq 3$ ce zéro est au moins égal à celui de $2 + 3z + z^2 - 2z^3$ qui est supérieur à $\hat{\theta}_3$. *Pour les nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_3$, auxquels nous nous limiterons dorénavant, on a donc $u_2 = w_2 = 2$, ce qui ne peut correspondre qu'à $P(z) \equiv D_2(z) \equiv 1 + z - z^2$ c'est-à-dire à $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \theta_\infty$.

Nous n'avons donc plus à considérer que le cas $u_1 = 1$, qui exige $u_2 \geqq w_2 = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $u_2 \geqq 1$; on a alors

$$D_3(z) \equiv (1+z)\left(1 + \frac{1}{2} z - z^2\right) - z\left(u_2 - \frac{1}{2}\right)(1-z).$$

([11]) On peut remarquer ici que la relation $u_0 = 1$ caractérise ceux des nombres de S qui sont des unités.

Pour $u_2 = 3$, ce polynome n'est autre que $\hat{P}_2(z)$; pour $u_2 \geqq 3$, il présente le zéro $\tau_3 \geqq \hat{\theta}_2 > \hat{\theta}_3$. En vertu du théorème 2, nous avons donc $u_2 = 1$ ou $u_2 = 2$.

Le cas $u_2 = 1$ a déjà été étudié (*cf.* p. 75). Il correspond à

$$P(z) \equiv 1 - z^2 + z^n(1 + z - z^2) \qquad \text{avec} \qquad n \geqq 1, \qquad \text{soit} \qquad \theta = \theta'_n,$$

ou

$$P(z) \equiv 1 - z^2 - z^n(1 + z - z^2) \qquad \text{avec} \qquad n \geqq 1, \qquad \text{soit} \qquad \theta = \hat{\theta}'_n.$$

Ces nombres θ étant écartés, nous avons donc

$$u_0 = u_1 = 1, \qquad u_2 = 2.$$

Pour poursuivre la discussion, nous utiliserons systématiquement les propriétés suivantes qui découlent immédiatement de l'étude faite plus haut.

Première propriété : Lorsque $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, sont connus et que $s \geqq n$, on forme le polynome $D_n(z)$; On en déduit la valeur de w_n. On doit avoir $u_n \geqq w_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

Deuxième propriété : On forme ensuite

$$D_{n+1}(z) \equiv (1 + z) D_n(z) - z \frac{u_n - w_n}{u_{n-1} - w_{n-1}} D_{n-1}(z).$$

On doit avoir $D_{n+1}(1) \geqq 0$, qui est équivalente à $u_n \leqq w^*_n$ (*voir* lemme 4), l'égalité entraînant $\theta = \tau^*_n$ et $D_{n+1}(z) \equiv (1 - z) D^*_n(z)$. Si les deux inégalités strictes $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$ sont satisfaites, on a $s \geqq n + 1$.

Nous utiliserons les polynomes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$, dont l'expression a déjà été donnée dans l'introduction.

Considérons le développement en série entière ([12])

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = 1 + z + 2z^2 + \ldots + v_n z^n + \ldots.$$

Soit N l'entier tel que

$$u_n = v_n \qquad \text{pour} \qquad n < N,$$
$$u_N \neq v_N.$$

D'après ce que nous venons de voir, $N \geqq 3$. D'autre part $s \geqq N$, comme le montre le lemme préliminaire appliqué à

$$Q(z) \frac{1}{1 - z - z^2} - P(z) = (v_N - u_N) z^N + \ldots.$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

([12]) On peut remarquer que la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1 - z - z^2}$ est, dans $|z| < 1$, la limite commune de $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ et $\dfrac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)}$.

Premier cas : N est pair, soit $N = 2p$ avec $p \geqq 2$.

On vérifie facilement [13] que

$$D_{2p}(z) \equiv \frac{P_{2p+1}(z) + \dfrac{p+2}{p+1} z P_{2p-1}(z)}{1+z}, \qquad \text{d'où} \quad w_{2p} = v_{2p} - \frac{p+2}{p+1};$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p} \geqq v_{2p} - \dfrac{p+2}{p+1}$, soit $u_{2p} \geqq v_{2p} - 1$. On a ensuite

$$D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p+1}(z) - (u_{2p} - v_{2p}) z P_{2p-1}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient $u_{2p} \leqq v_{2p} + \dfrac{p}{p-1}$, soit $u_{2p} \leqq v_{2p} + 1$ sauf dans le cas $p = 2$ où $u_{2p} = v_{2p} + 2$ est possible; mais alors $\theta = \tau_4^*$ et $D_4^*(2) = -D_5(2) = -1 < 0$, d'où $\theta = \tau_4^* > 2$, cas écarté dans notre étude.

Il ne reste donc à examiner que $u_{2p} = v_{2p} \pm 1$, avec $s \geqq 2p+1$.

Si $u_{2p} = v_{2p} + 1$, on a $D_{2p+1}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z)$, d'où $w_{2p+1} = v_{2p+1} + 2$; il en résulte (première propriété) que $u_{2p+1} \geqq v_{2p+1} + 2$. On a ensuite

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - \frac{p+1}{2p+3}(u_{2p+1} - v_{2p+1} - 2) z D_{2p}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient

$$u_{2p+1} \leqq v_{2p+1} + 2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de u_{2p+1} montrent que pour $p \geqq 5$ on a forcément $u_{2p+1} = v_{2p+1} + 2 = w_{2p+1}$, donc $\theta = \hat{\theta}_{2p}$. Pour $p \leqq 4$, on peut avoir $u_{2p+1} > v_{2p+1} + 2$, mais alors

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p}) = -\frac{p+1}{2p+3}(u_{2p+1} - v_{2p+1} - 2)\, \hat{\theta}_{2p} D_{2p}(\hat{\theta}_{2p}) > 0,$$

d'où $\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p} \geqq \hat{\theta}_8$, cas que nous écarterons en nous limitant dorénavant à l'étude des *nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_8$.

Si $u_{2p} = v_{2p} - 1$, on a $D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z)$, d'où $w_{2p+1} = v_{2p+1} - 2$; il en résulte (première propriété) que $u_{2p+1} \geqq v_{2p+1} - 2$. On a ensuite

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - (p+1)(u_{2p+1} - v_{2p+1} + 2) z D_{2p}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient

$$u_{2p+1} \leqq v_{2p+1} - 2 + \frac{4p-2}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les deux valeurs possibles de u_{2p+1} montrent

(13) On pourrait déduire l'expression de $D_{2p}(z)$ des considérations développées plus haut.

que, ou bien $u_{2p+1}=v_{2p+1}-2=w_{2p+1}$, ce qui entraîne $\theta=\theta_{2p}$, ou bien $u_{2p+1}=v_{2p+1}-1$ avec $p=2$. L'étude de ce dernier cas où $s\geqq 2p+2=6$ se poursuit de la même façon : on trouve $D_6(z)\equiv 1-z+z^2-z^4+2z^5-z^6$, puis $w_6=11$, d'où (d'après la première propriété) $u_6\geqq 11$; on a ensuite $D_7(z)\equiv(1+z)D_6(z)-(u_6-11)z\,D_5(z)$ et (d'après la deuxième propriété) $u_6\leqq 11+\frac{2}{3}$; on en conclut que $u_6=11=w_6$, d'où $\theta=\tau_6$, racine de $1-z+z^2-z^4+2z^5-z^6=0$; c'est le nombre que nous avons représenté par θ'' dans l'introduction.

Deuxième cas : N est impair, soit $N=2p+1$ avec $p\geqq 1$. On vérifie facilement que

$$D_{2p+1}(z)\equiv P_{2p+1}(z), \qquad \text{d'où} \quad w_{2p+1}=v_{2p+1}-1;$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p+1}\geqq v_{2p+1}-1$. On a ensuite

$$D_{2p+2}(z)\equiv(1+z)\,D_{2p+1}(z)-\frac{p+1}{p+2}(u_{2p+1}-v_{2p+1}+1)\,z\,D_{2p}(z),$$

où $D_{2p}(z)$ est le même polynome que celui qui a été employé au début de l'étude du premier cas; en utilisant la deuxième propriété, il vient

$$u_{2p+1}\leqq v_{2p+1}+1+\frac{2p+2}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de u_{2p+1} montrent que l'on doit examiner successivement :

a. $u_{2p+1}=v_{2p+1}-1=w_{2p+1}$; mais alors $\theta=\theta_{2p+1}$.

b. $u_{2p+1}\geqq v_{2p+1}+2$ avec $p\leqq 2$; mais alors

$$D_{2p+2}(\hat\theta_{2p+1})\geqq(1+\hat\theta_{2p+1})\,D_{2p+1}(\hat\theta_{2p+1})-3\frac{p+1}{p+2}\hat\theta_{2p+1}\,D_{2p}(\hat\theta_{2p+1})$$
$$\geqq\frac{(1+\hat\theta_{2p+1}^2)\,P_{2p+1}(\hat\theta_{2p+1})-3\,\hat\theta_{2p+1}^2\,P_{2p-1}(\hat\theta_{2p+1})}{1+\hat\theta_{2p+1}}>0,$$

ce qui montre que $\theta>\tau_{2p+1}>\hat\theta_{2p+1}\geqq\hat\theta_5$, cas qui doit être écarté parce que nous nous limitons à $\theta<\hat\theta_8$.

c. $u_{2p+1}=v_{2p+1}+1$; l'étude de ce cas, où $s\geqq 2p+2$, se poursuit toujours de la même façon : le polynome $D_{2p+2}(z)$ qui a déjà été formé, se met ici sous la forme plus simple

$$D_{2p+2}(z)\equiv\frac{\hat P_{2p+1}(z)+\dfrac{2z}{p+2}P_{2p+1}(z)}{1+z} \qquad \text{d'où} \quad w_{2p+2}=v_{2p+2}+2-\frac{4}{p+2};$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p+2} \geqq v_{2p+2} + 2 - \frac{4}{p+2}$; on a ensuite

$$D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p+1}(z) - \frac{u_{2p+2} - v_{2p+2} - 2}{2} z\, P_{2p+1}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient $u_{2p+2} \leqq v_{2p+2} + 2 + \frac{4}{p}$. Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de u_{2p+2} montrent que l'on doit examiner successivement :

α. $u_{2p+2} = v_{2p+2} + 1$ avec $p = 1$ ou $p = 2$; mais si $p = 2$, on a $u_{2p+2} = w_{2p+2}$, donc $\theta = \tau_{2p+2} = \tau_6$, cas à rejeter car $D_6(z)$ n'est pas à coefficients entiers; tandis que si $p = 1$, on a $\theta > \tau_5$, supérieur à $\hat{\theta}_6 > \hat{\theta}_8$, comme on peut le vérifier par le calcul.

β. $u_{2p+2} \geqq v_{2p+2} + 3$ avec $p \leqq 4$; mais alors $D_{2p+3}(\hat{\theta}_{2p+1}) > 0$, donc

$$\theta \geqq \tau_{2p+3} > \hat{\theta}_{2p+1} \geqq \hat{\theta}_9;$$

nous écarterons ce cas en limitant notre étude *aux nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_9$.

γ. $u_{2p+2} = v_{2p+2} + 2$; mais alors $s \geqq 2p + 3$ et nous poursuivons l'étude suivant la même méthode ; nous avons

$$D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p+1}(z), \qquad \text{d'où} \quad w_{2p+3} = v_{2p+3} + 3;$$

il en résulte (première propriété) que $u_{2p+3} \geqq v_{2p+3} + 3$; on a ensuite

$$D_{2p+4}(z) \equiv (1+z)\,D_{2p+3}(z) - \frac{p+2}{4}(u_{2p+3} - v_{2p+3} - 3)\,z\,D_{2p+2}(z);$$

en utilisant la deuxième propriété, il vient $u_{2p+3} \leqq v_{2p+3} + 3 + \frac{8}{p+1}$. Les deux inégalités bornant les valeurs de u_{2p+3} montrent que l'on a, ou bien $u_{2p+3} = v_{2p+3} + 3$, ce qui entraîne $\theta = \tau_{2p+3} = \hat{\theta}_{2p+1}$, ou bien $u_{2p+3} \geqq v_{2p+3} + 4$ avec $p \leqq 7$, mais dans ce dernier cas on a

$$D_{2p+4}(\hat{\theta}_{2p+1}) \geqq -\frac{p+2}{4}\hat{\theta}_{2p+1}\, D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p+1}) > 0,$$

ce qui entraîne $\theta > \tau_{2p+4} > \hat{\theta}_{2p+1} \geqq \hat{\theta}_{15}$ et nous écarterons ce cas en nous limitant aux *nombres* θ *inférieurs à* $\hat{\theta}_{15}$.

Si l'on compare entre eux les nombres θ_n, θ'_n, $\hat{\theta}_n$, $\hat{\theta}'_n$, ce qui ne présente aucune difficulté, on peut résumer les résultats de l'étude précédente sous la forme que voici :

Théorème. — *Les nombres* θ *de l'ensemble* S *qui sont inférieurs à* $\hat{\theta}_{15}$ *sont les* *suivants* :

$$\theta_2 = \theta'_1 < \theta'_2 < \theta'_3 < \theta_3 < \theta'_4 < \theta_4 < \theta'_5 < \theta'' < \theta_5 < \theta'_6 < \ldots$$
$$< \theta'_n < \theta_n < \theta'_{n+1} < \ldots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \ldots < \hat{\theta}_n < \hat{\theta}'_{n+1} < \hat{\theta}_{n-1} < \ldots < \hat{\theta}_{15}.$$

On retrouve, en particulier, le fait que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le plus petit élément de l'ensemble dérivé S′ de S. On voit de plus que c'est un élément isolé de S′.