SZOLEM MANDELBROJT

Influence des propriétés arithmétiques des exposants dans une série de Dirichlet

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 3 (1954), p. 301-320

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_3_301_0>

INFLUENCE
DES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES
DES
EXPOSANTS DANS UNE SÉRIE DE DIRICHLET

Par M. S. MANDELBROJT.

1. Il existe une liaison intéressante entre deux phénomènes en apparence distincts de la théorie des fonctions : d'une part, la dépendance du caractère d'une fonction représentée par une série de Dirichlet (et surtout de la distribution de ses singularités) de la structure arithmétique de ses exposants, et, d'autre part, le comportement d'une fonction de la classe A (c'est-à-dire, d'une transformée de Fourier d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue) à support compact, ou ce qui revient au même, d'après le théorème de Paley-Wiener, le comportement d'une fonction entière de type moyen, intégrable sur la droite réelle (1).

C'est un théorème de composition des singularités qui est à la base de ces considérations. On sait que le célèbre théorème d'Hadamard sur les singularités de $\Sigma a_n b_n z^n$ n'est plus vrai lorsqu'on substitue aux séries de Taylor-D (c'est-à-dire, aux séries de la forme $\Sigma a_n e^{-ns}$) des séries de Dirichlet générales. Mais, avec certaines hypothèses sur la croissance des fonctions en dehors des singularités, et en modifiant, au besoin, « la composante » on peut, comme je l'ai démontré il y a vingt cinq ans, énoncer des théorèmes d'une grande généralité [4]. On trouvera un exposé de mes résultats dans le livre de V. Bernstein [2]. Récemment Agmon [1] a repris le sujet. Dans le théorème d'Agmon, comme dans un des miens, on compose deux séries de types

(1) Le support d'une fonction est la fermeture de l'ensemble où cette fonction est distincte de zéro.

différents (c'est à dire d'exposants différents). Tout en étant obligé de poser des conditions restrictives sur les exposants (aucune restriction sur les exposants n'est imposée dans mes théorèmes), Agmon suppose beaucoup moins que moi sur la croissance des fonctions composantes, en dehors des singularités ([2]); la « composée » d'Agmon a d'ailleurs la simplicité de celle d'Hadamard, ou de celle que j'ai introduite dans le cas où les composées sont du même type.

Mon théorème le plus général était basé sur l'étude d'une intégrale de la forme

$$\int f(s-z)\,\varphi(z)\,\frac{dz}{z^k} \tag{A}$$

étendue sur une droite verticale, les fonctions f et φ étant données par des séries de Dirichlet. Le fait essentiel dans le développement de cette intégrale est exprimé par la circonstance suivante : la transformée de Fourier de $(x+iy)^{-k}$ (considérée comme fonction de y) a comme support une demi-droite. L'idée essentielle d'Agmon consiste à remplacer cette fonction par une fonction dont la transformée de Fourier est à support compact. Il considère, en d'autres mots, une intégrale de la forme

$$\int f(s-z)\,\varphi(z)\,\mathrm{H}(z)\,dz, \tag{B}$$

la transformée de Fourier de $\mathrm{H}(iy)$ étant à support compact $\mathrm{H}(z)$ est, par conséquent, une fonction entière, du type moyen, $\mathrm{H}(iy)$ appartenant à L^2.

Ce sont des intégrales de la forme (B) qui vont nous servir. Voici comment on peut résumer, tout en restant formel et intuitif, l'idée générale qui est à la base des considérations de ce Mémoire.

En désignant par C une suite de nombres complexes $\{c_n\}$, et par Λ une suite $\{\lambda_n\}$ avec $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, $\lim \lambda_n=\infty$, on désignera par (C, Λ) la série de Dirichlet $\mathrm{X}=\Sigma c_n e^{-\lambda_n s}$, et l'on dira que cette série est du type Λ. Soient $\mathrm{X}=(\mathrm{C}, \Lambda)$ et $\mathrm{Y}=(\mathrm{B}, \mathrm{M})$ deux séries de Dirichlet (respectivement du type Λ et du type M), et soit ω une fonction de la classe A, c'est-à-dire la transformée de Fourier d'une fonction G appartenant sur la droite à L, dont le support est un compact [c'est-à-dire que $\omega(u)$ s'annule en dehors de ce compact]. Moyennant des hypothèses simples sur les suites Λ et M, on voit que, si le support de ω est assez petit, à tout n correspond, *au plus*, un seul k tel que $\omega(\lambda_k-\mu_n)\neq 0$. La suite $\{p_n\}$, où $p_n=c_k b_n\,\omega(\lambda_k-\mu_n)$ est donc bien définie [avec $p_n=c_{k_n} b_n\,\omega(\lambda_{k_n}-\mu_n)$ si $\omega(\lambda_{k_n}-\mu_n)\neq 0$, et $p_n=0$ si un tel λ_{k_n} n'existe pas]. On désignera pas $\mathrm{H}(\omega;\mathrm{X},\mathrm{Y})$ la série composée $(\mathrm{P},\mathrm{M})=\Sigma p_n e^{-\mu_n s}$. Désignons par $\omega(\Lambda-\mathrm{M})$ la suite $\{\omega_n\}$, où $\omega_n=\omega(\lambda_{k_n}-\mu_n)$, ou $\omega_n=0$, selon

([2]) Chez Agmon la croissance de la fonction en dehors des singularités, est caractérisée par une fonction $\mathrm{A}(t)$ satisfaisant (25). Chez moi $\mathrm{A}(t)$ était une puissance de t.

que k_n avec $\omega(\lambda_{k_n} - \mu_n) \neq 0$ existe ou non. Un théorème de composition s'énoncera de la manière suivante : Si X appartient à une classe D_1 (classe de séries de Dirichlet qui sera, par exemple, caractérisée par la distribution de ses singularités et par la croissance de la fonction en dehors de ces singularités) et Y à une classe D_2, $H(\omega; X, Y)$ appartient à une classe $[D_1 D_2]$, dont les propriétés sont décrites en partant de celles de D_1 et D_2, à condition, toutefois, que la fonction entière dont ω est la transformée de Fourier croisse d'une manière convenable. Mais du fait qu'une série du type M appartient à une classe, en l'occurence $[D_1 D_2]$, résulte que ses coefficients, ici la suite P, possèdent une certaine propriété qui dépend uniquement des propriétés des classes D_1 et D_2. Il en résulte qu'une propriété de la suite $\omega(\Lambda - M)$, quelle que soit la fonction ω qu'on a caractérisée plus haut, dérive des propriétés des classes D_1 et D_2. Or la série Y sera donnée d'avance, c'est-à-dire que les séries B et M seront convenablement choisies et fixées, de sorte que *avec chaque choix de la fonction* ω, *une propriété de la série* $X = (A, \Lambda)$ *fournit une propriété de la suite* Λ. Ainsi si M est la suite d'entiers positifs, cette propriété de la suite Λ porte sur la partie fractionnaire des λ_n. *Par contre, une propriété de* X, *lorsque la suite* Λ *est donnée, fournit*, comme nous l'avons dit plus haut, *une propriété de toutes les fonctions* ω, *assujetties aux conditions précitées*. Mais ce point de vue sera abordé dans un autre Mémoire.

2. Pour démontrer son théorème de composition dont il a été question plus haut, Agmon a utilisé un lemme qui est une adaptation d'un lemme de Levinson [3], mais ce lemme [3] résulte en réalité aussi, sous une forme constructive et plus précise, d'un théorème que j'ai démontré en 1941 [5].

Nous allons reprendre ces considérations en les complétant et en les adaptant au sujet traité.

Lemme I. — *Soit* $\{k_n\} = K$ *une suite positive avec* $\Sigma k_n = k < \infty$, *et soit* $a > k$. *La fonction*

$$F(z) = F_{K,a}(z) = \frac{\sin az}{z} \prod \frac{\sin k_n z}{k_n z} \qquad (z = x + iy) \tag{1}$$

est une fonction entière, le produit convergeant uniformément dans tout compact, et l'on a

$$F(z) \not\equiv 0,$$

$$|F(z)| < e^{(a+k)|y|} e^{-\Lambda(|z|)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a, \tag{2}$$

(3) *Voir* notre lemme 5 qui est plus précis que le lemme d'Agmon. Le lemme 4, dont le lemme 5 est une conséquence, se trouve implicitement dans [5] et [7].

où

$$A(u) = \operatorname{Sup}\left(n \log u + \sum_{1}^{n} \log k_p\right) \qquad (u > 0),$$

$F(x) \in L$, *et la transformée de Fourier* $f(t) = f_{K,a}(t)$ *de* $F(x)$ *possède les propriétés suivantes :*

$$(3) \qquad \begin{cases} f(t) = 1 & \textit{pour} \quad |t| \leq a - k, \\ f(t) = 0 & \textit{pour} \quad |t| \geq a + k. \end{cases}$$

Démonstration. — Posons

$$(4) \qquad \begin{cases} f_0(t) = 1 & \textit{pour} \quad |t| \leq a, \\ f_0(t) = 0 & \textit{pour} \quad |t| > a, \end{cases}$$

et soit

$$f(t) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n k_1 k_2 \ldots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}} dt_{n-1} \ldots \int_{-k_1}^{k_1} f_0(t + t_1 + \ldots + t_n)\, dt,$$

On sait (*voir* [5] et [7]) que cette limite existe, que la fonction $f(t)$ ainsi définie possède les propriétés (3), et qu'elle est indéfiniment dérivable.

Posons

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{itz}\, dt.$$

On voit facilement que

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim \frac{1}{2^n k_1 \ldots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}} dt_{n-1} \ldots \int_{-k_1}^{k_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t + t_1 + \ldots + t_n)\, e^{itz}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim \frac{1}{2^n k_1 \ldots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \ldots \int_{-k_1}^{k_1} dt_1 \int_{-a-(t_1+\ldots+t_n)}^{a-(t_1+\ldots+t_n)} e^{itz}\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin az}{z} \lim \frac{\sin k_1 z}{k_1 z} \cdots \frac{\sin k_n z}{k_n z} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin az}{z} \prod \frac{\sin k_n z}{k_n z}, \end{aligned}$$

$f(t)$ et $F(x)$ étant transformées de Fourier l'une de l'autre, toutes les deux appartenant à L; d'ailleurs, comme $|\sin z| \leq |z|\, e^{|y|}$, on voit que

$$|F(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, e^{(a+k)|y|} \frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_n |z|^n},$$

et, par conséquent :

$$|F(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, e^{(a+k)|y|} \operatorname{Inf} \frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_n |z|^n}.$$

Ainsi F satisfait à l'inégalité (2).

Lemme 2. — *Soit* B(*t*) *une fonction convexe, non décroissante sur la droite, satisfaisant aux conditions*

(5) $$\lim_{t=\infty} \mathrm{B}(t)\, t^{-1} = \infty,$$

(6) $$\int^{\infty} \mathrm{B}(t)\, e^{-t}\, dt < \infty,$$

et posons

(7) $$\log \mathrm{M}_n = \operatorname{Sup}_t [(n-4)\,t - \mathrm{B}(t)],$$

(8) $$k_n^{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n} \quad (n \geqq 2), \qquad k_1^{\mathrm{B}} = \frac{1}{\mathrm{M}_1}.$$

On a $\Sigma k_n^{\mathrm{B}} = k^{\mathrm{B}} < \infty$, *et la fonction* $\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}_{\mathrm{K^B},a}(z)$, *définie par* (1), *où l'on pose* $k_n = k_n^{\mathrm{B}}$, *satisfait à l'inégalité*

(9) $$|\mathrm{F}(z)| \leqq \mathrm{R}\, e^{(a+k^{\mathrm{B}})|y|}\, e^{-\mathrm{B}(\log|z|)} \frac{1}{1+|z|^2},$$

où R *est une constante. La transformée de Fourier f de* F *satisfait à* (3).

Démonstration. — Il résulte d'abord du lemme 1 que

(10) $$|\mathrm{F}_{\mathrm{K^B},a}(z)| \leqq \mathrm{R}_1\, e^{(a+k^{\mathrm{B}})|y|}\, e^{-\mathrm{A}(|z|)},$$

où

$$\mathrm{A}(u) = \operatorname{Sup}_n \left(n \log u + \sum_1^n \log k_p^{\mathrm{B}} \right) \qquad (u > 0)$$

Il résulte aussi de (5) que $\dfrac{\log \mathrm{M}_n}{n} \to \infty$, et, en posant

$$\log \mathrm{M}_x = \operatorname{Sup}_t [(x-4)\,t - \mathrm{B}(t)],$$

on a $\dfrac{\log \mathrm{M}_x}{x} = \infty$; à chaque *t*, assez grand, correspond donc un x_t tel que

$$\mathrm{B}(t) + 4t = \operatorname{Sup}_{x \geqq 0} (xt - \log \mathrm{M}_x) = x_t t - \log \mathrm{M}_{x_t};$$

ce qui permet d'écrire, pour *t* assez grand, l'inégalité suivante :

$$\mathrm{B}(t) + 4t \leqq ([x_t] + 1)\,t - \log \mathrm{M}_{[x_t]-1}$$

c'est-à-dire l'inégalité

(11) $$\mathrm{B}(t) + 4t \leqq \mathrm{A}(e^t) + 2t.$$

L'inégalité (9) résulte alors de (10) et (11).

Lemme 3. — *Soit* B(*t*) *une fonction satisfaisant aux conditions du lemme* 2, *et soient a et b deux constantes telles que* $0 < b < a$. *Il existe alors, une fonction entière*

$F(z) = F_{a,b}(z)$ *telle que la transformée de Fourier f de $F(x)$ satisfait à (3) avec k remplacé par b, et telle que*

$$|F_{a,b}(z)| \leqq R_1 e^{(a+b)|y|} e^{-B(\log|z|+p)} \frac{1}{1+|z|^2}, \tag{12}$$

où R_1 et p sont des constantes.

Démonstration. — Posons

$$B_p(t) = B(t+p),$$

et appliquons le lemme 2 à la fonction $B_p(t)$ (avec $k_n^B = k_n^{B_p}$). En posant

$$\log M_n^p = \operatorname{Sup}_t [nt - B_p(t)],$$

il résulte de (7) que

$$\log M_n^p = \operatorname{Sup}_t [nt - B(t+p)] = \operatorname{Sup}_t [n(t+p) - B(t+p)] - pn = \log M_n - pn.$$

Ainsi

$$k_n^{B_p} = \frac{M_n^p}{M_{n+1}^p} = \frac{M_n e^{p(n+1)}}{M_{n+1} e^{pn}} = \frac{M_n}{M_{n+1}} e^p \qquad (n \geqq 2).$$

Il suffit donc de choisir p de sorte que $e^p k = b$ (où $k = \Sigma k_\nu^B$) pour que (12) ait lieu.

Lemme 4. — *Le lemme 3 reste vrai si l'on abandonne la condition de la convexité de $B(t)$, ainsi que la condition (5).*

On peut, évidemment, supposer, sans restreindre la généralité, que la fonction B est positive. Posons, alors

$$B_0(t) = \int_0^t B(u)\, du.$$

Il est clair que pour $t > 1$:

$$B_0(t) \geqq \int_{t-1}^t B(u)\, du \geqq B(t-1).$$

Il suffit donc de démontrer le lemme 4 lorsque $B(t)$ y est remplacé par la fonction $C(t) = B_0(t+1)$. Or, la fonction $C(t)$ possède toutes les propriétés exigées, dans l'énoncé du lemme 3 de la fonction $B(t)$ qui y figure.

Ce même lemme peut s'écrire de la manière suivante :

Lemme 5. — *Soient $0 < \alpha < \beta < \infty$, et soit $C(u)$ une fonction non décroissante sur la demi-droite positive, telle que*

$$\int^\infty \frac{C(u)}{u^2} du < \infty. \tag{13}$$

Il existe une fonction entière $F(z)$ non identiquement nulle satisfaisant à l'inégalité

$$|F(z)| \leqq C e^{\beta|y|} \frac{1}{1+x^2} e^{-C(|z|)} \tag{14}$$

où C *est une constante, la transformée de Fourier* f *de* F *possédant les propriétés suivantes :*

$$(15)\qquad \begin{cases} f(u) = 1 & pour\ |u| \leqq \alpha, \\ f(u) = 0 & pour\ |u| \geqq \beta, \end{cases}$$

les fonctions F *et* f *étant respectivement de la forme suivante :*

$$(16)\qquad F(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin az}{z}\prod\frac{\sin k_n z}{k_n z},$$

$$(17)\qquad f(u) = \lim \frac{1}{2^n k_1 \ldots k_n}\int_{-k_n}^{k_n} dt_n \int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}} dt_{n-1} \ldots \int_{-k_1}^{k_1} f_0(t + t_1 + \ldots + t_n)\, dt_1,$$

où $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$, *les* $k_n > 0$ *sont tels que* $\Sigma k_n = \frac{\beta-\alpha}{2}$, $f_0(t) = 1$ *pour* $|t| \leqq a$, $f_0(t) = 0$ *pour* $|t| > a$.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

LEMME 6. — *Soit* $B(t)$ *une fonction non décroissante telle que*

$$\int^{\infty} B(t)\, e^{-t}\, dt < \infty,$$

Il existe une fonction $p(t)$ *tendant vers l'infini en croissant (lorsque* t *tend vers l'infini) et telle que*

$$\int^{\infty} (B[t + p(t)]\, e^{-t}\, dt < \infty.$$

la fonction $p(t)$ *pouvant, d'ailleurs, être choisie de la manière suivante : en posant*

$$q(c) = \int_c^{\infty} B(u)\, e^{-u}\, du,$$

et en désignant par $\{p_n\}$ *une suite positive quelconque tendant vers l'infini en croissant, choisissons la suite* $\{c_n\}$ *de sorte que*

$$\Sigma\, e^{p_n} q(c_n + p_n) < \infty,$$

et posons $p(t) = p_n$ *pour* $c_n \leqq t < c_{n+1}$.

Démonstration. — On a quels que soient c et p :

$$\int_c^{\infty} B(t+p)\, e^{-t}\, dt = e^p \int_{c+p}^{\infty} B(u)\, e^{-u}\, du = e^p q(c+p).$$

Ainsi, avec notre choix de $p(t)$ on a

$$\int_{c_1}^{\infty} B[t + p(t)]\, e^{-t}\, dt \leqq \Sigma\, e^{p_n} q(c_n + p_n) < \infty$$

Les deux lemmes 5 et 6 permettent d'énoncer le lemme suivant :

LEMME 7. — *La fonction* $C(u)$ *et les quantités* α *et* β *étant définies comme dans le lemme* 5, *il existe une fonction* $v(r)$ *tendant vers l'infini en croissant, et une fonction* $F(z)$ *satisfaisant à l'inégalité*

$$|F(z)| \leqq C_1 e^{\beta|y|} \frac{1}{1+x^2} e^{-C(v(|z|)|z|)}, \tag{18}$$

cette fonction, ainsi que sa transformée de Fourier f, *satisfaisant aux relations* (15), (16) *et* (17).

La fonction $v(r)$ *peut, d'ailleurs, être choisie de la manière suivante : en posant*

$$\int_g^{\infty} \frac{C(u)}{u^2}\, du = h(g). \tag{19}$$

et en désignant par $\{\gamma_n\}$ *une suite croissante tendant vers l'infini, avec* $\gamma_1 > 1$, *et telle que*

$$\Sigma \gamma_n h(g_n \gamma_n) < \infty, \tag{20}$$

il suffit de poser $v(r) = \gamma_n$ *pour* $g_n \leqq r < g_{n+1}$.

LEMME 8. — *Soit* $C(u)$ *une fonction non décroissante sur la demi-droite positive satisfaisant à* (13) *et soient* $0 < \alpha < \beta$. *Soient* $\{\eta_n\}$ *et* $\{g_n\}$ *deux suites positives, avec* $\eta_n < 1$, $\lim \eta_n = 0$, *la suite* $\{g_n\}$ *tendant vers l'infini en croissant: supposons en plus que*

$$\sum \frac{h\left(\dfrac{g_n}{\eta_n}\right)}{\eta_n} < \infty, \tag{21}$$

où h *est la fonction définie par* (19).

Il existe une fonction entière $F(z)$, *donnée par une expression de la forme* (16) *dont la transformée de Fourier,* f, *possède les propriétés* (15) *et est donnée par* (17), *et qui satisfait aux inégalités* ($n \geqq 1$) :

$$|F(\eta_n z)| \leqq e^{\varepsilon_n g_n - C(|z|)} e^{\beta \eta_n |y|} \frac{1}{1+\eta_n^2 x^2}, \tag{22}$$

avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

Démonstration. — En posant $\gamma_n = \eta_n^{-1}$, formons les fonctions $v(r)$ et $F(z)$ du lemme 7 correspondant aux suites $\{g_n\}$ et $\{\gamma_n\}$ (g_n de l'énoncé du lemme 8, γ_n venant d'être défini), ce qui est possible grâce à (21).

On a, d'après la définition de $v(r)$, pour $r > g_n \eta_n^{-1}$:

$$C(v(\eta_n r)\eta_n r) \geqq C(r).$$

La fonction $C(u)$ étant non décroissante, on a, en vertu de (19) :

$$g\, h(g) \geqq C(g).$$

On peut donc écrire pour $r \geqq 0$:

$$\begin{aligned} C(v(\eta_n r)\eta_n r) &= C(v(\eta_n r)\eta_n r) - C(r) + C(r) \\ &\geqq C(0) + C(r) - C(g_n \eta_n^{-1}) \geqq C(0) + C(r) - g_n \eta_n^{-1} h(g_n \eta_n^{-1}), \end{aligned}$$

et le lemme 7 permet d'écrire

$$\begin{aligned} |F(\eta_n z)| &\leqq C_1 e^{\beta \eta_n |y|} \frac{1}{1+\eta_n^2 x^2} e^{-C(v(\eta_n |z|)\eta_n |z|)} \\ &\leqq C_1 e^{\beta \eta_n |y|} \frac{1}{1+\eta_n^2 x^2} e^{-C(0) - C(|z|)} e^{g_n \eta_n^{-1} h(g_n \eta_n^{-1})}. \end{aligned}$$

Mais il résulte de (21) que $\lim \eta_n^{-1} h(g_n \eta_n^{-1}) = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 9. — *Les deux suites positives* $\{g_n\}\{\gamma_n\}$ *tendant vers l'infini, la fonction* h *étant définie par* (19), *avec* $C(u) = \log u$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\lim \gamma_n h(g_n \gamma_n) = 0, \qquad \lim \gamma_n^{\frac{1}{g_n}} = 1.$$

Démonstration. — On a, pour g assez grand :

$$\log g . g^{-1} \leqq h(g) = (\log g + 1) g^{-1} \leqq 2 \log g . g^{-1},$$

et par conséquent

$$\frac{\log g_n + \log \gamma_n}{g_n} \leqq \gamma_n h(g_n \gamma_n) \leqq \frac{2(\log g_n + \log \gamma_n)}{g_n},$$

ce qui prouve l'assertion.

3. Soit $f(s)$ $(s = \sigma + it)$ une fonction holomorphe dans un demi-plan $P_\alpha \equiv \sigma > \alpha$. Soit $a < \alpha$; désignons par R un domaine tel que $P_\alpha \subset R \subset P_a$ et tel qu'il existe une fonction holomorphe, uniforme dans R coïncidant dans P_α avec f. Supposons qu'il existe un domaine R_a possédant les propriétés mentionnées d'un domaine R et contenant tous les domaines R (autrement dit, R_a est le plus grand domaine R, si ce plus grand domaine R existe). Nous dirons alors que *le prolongement analytique direct de* f *dans* P_a *est uniforme.* Ce prolongement sera encore désigné par f.

Si le prolongement direct de f dans P_a est uniforme, l'ensemble $S_a^f = P_a - R_a$ sera appelé l'*ensemble singulier de* f *dans* P_a. Soit $\varepsilon > 0$, désignons par C_a la frontière de R_a, par $C(s_0, \varepsilon)$ le cercle $|s - s_0| < \varepsilon$, et écrivons

$$R_a^{\varepsilon, f} = R_a^\varepsilon = R_a - \bigcup_{s_0 \in C_a} C(s_0, \varepsilon).$$

R_a^ε est donc l'ensemble qui reste après avoir enlevé de R_a tous les cercles de rayon ε centrés sur les points de C_a.

Soit $A(t)$ une fonction positive de $t > 0$. Si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a dans R_a^ε, uniformément par rapport à σ, lorsque $s \in R_a^\varepsilon$:

$$f(s) = O[A(|t|)] \qquad (t \to \infty), \tag{23}$$

on dira que *la croissance de f dans P_a, en dehors des singularités, ne dépasse pas celle de* $A(t)$. Si, dans (23), $A(t)$ peut être remplacé par une constante, on dira que la fonction f (ou, le prolongement direct de f) *est bornée dans P_a, en dehors des singularités*.

Lemme 10. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un demi-plan P_α et dont le prolongement analytique direct est uniforme dans un demi-plan $P_a(a < \alpha)$, $f(s)$ étant bornée dnns P_a, en dehors des singularités. Soit, de même $\varphi(s)$ une fonction holomorphe dans un demi-plan P_β et dont le prolongement analytique direct est uniforme dans un demi-plan $P_b(b < \beta)$. Supposons que dans $R_b^{\varepsilon,\varphi}$, on ait pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$|\varphi(s)| = O(L(|t|)) \qquad (t \to \infty),$$

où $L(u)(u > 0)$ est intégrable, décroissant, uniformément par rapport à σ, lorsque $s \in R_b^{\varepsilon,\varphi}$, $\sigma < l$, l étant quelconque supérieur à b. Soit $p > \alpha + \beta$. L'intégrale

$$F(s) = \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} f(s-z)\varphi(z)\,dz \tag{24}$$

représente une fonction holomorphe dans le domaine $R_{ab}^{f\varphi}$ défini de la manière suivante : désignons par $S_{ab}^{f\varphi}$ la fermeture de l'ensemble des points $\gamma + \delta$ où γ est un point quelconque de S_a^f et δ un point quelconque de S_b^φ, $R_{ab}^{f\varphi}$ est le plus grand domaine faisant partie du complémentaire de $S_{ab}^{f\varphi}$ contenant un demi-plan $P_k(\sigma > k)$.

La démonstration de ce lemme se trouve dans mon travail [4], où l'intégrale (24) est étudiée, sauf que les fonctions f et φ sont données, dans ce Mémoire, par des séries de Dirichlet, ce qui ne change en rien la démonstration (4).

4. Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs, croissants, tendant vers l'infini, et soit $A = \{a_n\}$ une suite de nombres complexes. La série de Dirichlet $(A, \Lambda) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est dite *du type* Λ. Le type est régulier si $\operatorname{Inf}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \alpha > 0$. La quantité α sera appelée l'*écart du type*. Pour une série du type régulier les abscisses de convergence simple et absolue coïncident et sont données par

$$c = \overline{\lim} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n}.$$

Nous supposerons toujours que $-\infty < c < \infty$.

(4) En réalité dans [4] f est une série de Dirichlet, φ étant une série de Dirichlet divisée par une puissance α de s, avec $\alpha > 1$.

Soit $a < c$ [c abscisse de convergence de (A, Λ)], et supposons que le prolongement analytique direct de f dans P_a est uniforme; soit S_a^f l'ensemble singulier de f dans P_a. Désignons par $S_a^{f,\star}$ la fermeture de l'ensemble de tous les points $\alpha + 2k\pi i$, où α est un point quelconque de S_a^f et où k est un entier quelconque. Désignons par Σ l'intersection de $S_a^{f,\star}$ avec la droite $\sigma = c$. Cet ensemble est indépendant de a si $a < c$. Si Σ n'est pas la droite entière $\sigma = c$, nous dirons que la série $f = (A, \Lambda)$ est *prolongeable modulo* $2\pi i$. Dans le cas contraire on dira que cette série admet l'axe de convergence comme *coupure modulo* $2\pi i$. Si les points de Σ sont des points isolés de $S_a^{f,\star}$ on dira que l'*ensemble singulier de f sur l'axe de convergence est isolé, modulo* $2\pi i$.

Désignons par (λ_n) la *partie fractionnaire de* λ_n, c'est-à-dire $\lambda_n - [\lambda_n]$, où $[\lambda_n]$ est le plus grand entier inférieur à λ_n. La suite $\{(\lambda_n)\}$ des parties fractionnaires sera aussi désignée par (Λ).

Les théorèmes que nous allons tout d'abord démontrer ont le sens suivant : Si $f = (A, \Lambda)$ peut être prolongée modulo $2\pi i$ à travers son axe de convergence, et si dans $P_a (a < c)$ f ne croît pas, en dehors de ses singularités, plus vite qu'une fonction $A(t)$ (soumise à certaines conditions, elle-même), alors les valeurs prises par les parties fractionnaires (λ_n) doivent être assez « *tassées* », ce « tassement » dépendant de la croissance de $A(t)$. Ce tassement est encore plus grand — par exemple presque toutes les valeurs isolées de l'ensemble des valeurs prises par les (λ_n) doivent, chacune, être prise une infinité de fois — si l'ensemble singulier de f sur l'axe de convergence est isolé, modulo $2\pi i$.

Pour pouvoir énoncer ces théorèmes avec précision, il nous faut quelques nouvelles définitions.

Désignons par Ω l'ensemble des valeurs prises par les membres de (Λ), c'est-à-dire par les parties fractionnaires (λ_n) des λ_n. Si donc $\omega \in \Omega$, il existe un $\lambda_n \in \Lambda$ tel que $(\lambda_n) = \omega$, et $0 \leqq \omega < 1$, $\lambda_n - \omega$ entier; mais il peut y avoir plusieurs λ_n, et même une infinité, dont la partie fractionnaire est égale à ω. On désignera par Λ_ω l'ensemble de tous les λ_n tels que $(\lambda_n) = \omega$. Désignons par $\lambda^{(\omega)}$ le plus petit terme de Λ_ω, et par $\nu^{(\omega)}$ le nombre d'éléments dans Λ_ω; $\nu^{(\omega)}$ peut être égal à l'infini. Si $\omega \neq 0$, $\omega \in \Omega$ étant un point isolé de Ω, nous désignerons par $\delta^{(\omega)}$ la plus petite distance de ω aux autres points de l'adhérence (fermeture) de Ω. L'intervalle $I^{(\omega)} = (\omega - \delta^{(\omega)}, \omega + \delta^{(\omega)})$ sera appelé l'*intervalle d'isolement de* ω. Dans l'intervalle d'isolement de ω il n'existe aucun autre point de Ω, une de ses extrémités appartenant à $\overline{\Omega}$.

5. Voici quelques énoncés dont les démonstrations seront données plus loin,

THÉORÈME I. — 1° *Soit $f = (A, \Lambda)$ une série de Dirichlet de type régulier, admettant une abscisse de convergence finie c; soit $a < c$, et supposons que f est prolon-*

geable modulo $2\pi i$ à travers l'axe de convergence, dans P_a, le prolongement analytique direct de f dans P_a étant uniforme. Supposons que dans P_a, en dehors des singularités, la croissance de f ne dépasse pas celle d'une fonction non décroissante $A(t)$ $(t > 0)$, *satisfaisant à la condition*

$$\int^{\infty} \frac{\log A(t)}{t^2}\,dt < \infty. \tag{25}$$

2° *Supposons, qu'en posant*

$$h(g) = \int_g^{\infty} \frac{\log A(t)}{t^2}\,dt \qquad (g > 0), \tag{26}$$

l'ensemble Ω des valeurs ω prises par les termes de la suite (Λ) *des parties fractionnaires des λ_n, contienne une suite infinie $\{\omega_n\}$ de valeurs isolées dans Ω satisfaisant à la condition*

$$\lim \frac{h\left(\dfrac{\lambda^{(\omega_n)}}{\delta^{(\omega_n)}}\right)}{\delta^{(\omega_n)}} = 0. \tag{27}$$

3° *Dans chaque Λ_{ω_n} il existe un λ_{m_n} tel que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log|a_{m_n}|}{\lambda_{m_n}} = c. \tag{28}$$

Conclusion :

$$\varliminf_{n=\infty} \frac{\nu^{(\omega_n)}}{\lambda^{(\omega_n)}} > 0.$$

Rappelons que les notations Λ_ω, $\lambda^{(\omega)}$, $\delta^{(\omega)}$, $\nu^{(\omega)}$ ont été expliquées à la page précédente. Remarquons aussi que de la régularité du type Λ résulte déjà que $c = \varlimsup \dfrac{\log|a_n|}{\lambda_n}$.

Ainsi donc, l'ordre de grandeur du nombre de fois que chaque valeur isolée, ω, de Ω est prise [la valeur de ω étant une valeur *utile* dans le sens de (28)] par les termes de la suite (Λ) est au moins égal à celui du plus petit terme de Λ dont la partie fractionnaire est égale à ω.

Lorsque $A(t) \equiv 1$, on a $h(g) \equiv 0$, et la condition (27) est satisfaite automatiquement. Le théorème I conduit donc, en particulier au théorème suivant :

Théorème II. — *La conclusion du théorème* I *subsiste, si l'ensemble des conditions de ce théorème est remplacé par la condition suivante :*

La série $f = (A, \Lambda)$ du type régulier, avec $-\infty < c - \infty$ est prolongeable modulo $2\pi i$ à travers l'axe de convergence dans un demi-plan P_a, $a < c$, où le prolongement direct de f est uniforme et borné, en dehors des singularités. L'ensemble des valeurs prises par (Λ) contient une suite infinie $\{\omega_n\}$ de valeurs isolées dans Ω satisfaisant à la condition 3° *du théorème* I.

Nous allons construire un exemple d'une série (A, Λ) satisfaisant à toutes les hypothèses du théorème II (qui n'est, comme nous venons de voir, qu'un cas particulier du théorème I) et qui n'est pas une série de Taylor-D (série de Taylor en e^{-s}).

Considérons, d'une part, une suite d'entiers positifs, pairs $\{\mu_n\}$ tels que $\mu_{n+1} > 2\mu_n$ et, d'autre part, une suite positive $\{\omega_n\}$ avec $\omega_1 < 1$, tendant, en décroissant, vers zéro; ces suites étant, en plus, telles que, pour une certaine valeur $a < -\log 2$, on ait

$$\Sigma \omega_n e^{-2\mu_n a} < \infty \tag{29}$$

Étudions alors la fonction

$$f(s) = \Sigma e^{-\omega_n s}\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}.$$

Deux polynomes $(z+z^2)^{\mu_n}$ (correspondant à deux valeurs différentes de n) n'ont pas de puissance commune du fait que $\mu_{n+1} > 2\mu_n$; on voit aussi que, pour $\sigma > 0$, $f(s)$ peut être mis sous la forme

$$f(s) = \Sigma a_m e^{-\lambda_m s} = (\mathrm{A}, \Lambda),$$

où les λ_m parcourent tous les nombres de la forme $\omega_n + q$, avec $\mu_n \leqq q \leqq 2\mu_n$ $(n \geqq 1)$. Des inégalités $1 > \omega_1 > \omega_2 > \ldots$; $\mu_{n+1} > 2\mu_n + 1$, résulte alors que la suite Λ est régulière (l'écart du type Λ étant supérieur à $1 - \omega_1$). Comme pour $\lambda_m = \omega_n + q$ on a $(\lambda_m) = \omega_n$, on voit que $\Omega \equiv \{\omega_n\}$, et il est clair que $\lambda^{(\omega_n)} = \mu_n + \omega_n$, $\nu^{(\omega_n)} = \mu_n + 1$. On voit aussi que lorsque $\lambda_m = \mu_n + q$, on a $a_m = 2^{-\mu_n} C_{\mu_n}^{q-\mu_n}$. En posant $\lambda_{m_n} = \omega_n + \frac{3\mu_n}{2}$, on voit facilement que la condition 3° du théorème I est satisfaite, avec $c = 0$ comme abscisse de convergence de la série (A, Λ).

On voit, d'autre part, facilement, que la fonction f est holomorphe dans le domaine D limité par la courbe C, donnée par $|e^{-s} + e^{-2s}| = 2$ et contenant la demi-droite $\sigma > 0$, et que cette courbe est une coupure pour f.

En effet, la fonction

$$f_1(s) = \sum \left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}$$

possède certainement ces propriétés, en vertu du théorème lacunaire d'Hadamard; et pour $\sigma > 0$, on a

$$f(s) - f_1(s) = \Sigma(e^{-\omega_n s} - 1)\left(\frac{(e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n},$$

c'est-à-dire que dans tout compact contenu dans P_a [avec la valeur a choisie : $a < -\log 2$; (29) a lieu] on a

$$|f(s) - f_1(s)| \leqq \mathrm{K}\Sigma\omega_n |s| e^{-2\mu_n a} \leqq \mathrm{K}_1 \Sigma\omega_n e^{-2\mu_n a} < \infty;$$

le domaine $\overline{\mathrm{D}}$ étant contenu dans P_a (du fait que $a < -\log 2$), on voit que $f(s)$

est holomorphe dans D, et C est une coupure pour f. On a aussi, dans R_a^ε (pour la définition de ce domaine, *voir* p. 309) :

$$|f(s) - f_1(s)| \leqq \Sigma(1 + e^{-\omega_n \sigma})\,\delta^n,$$

où $0 < \delta < 1$, ce qui prouve immédiatement que f est bornée dans R_a^ε. Ainsi donc f satisfait à toutes les hypothèses de l'énoncé du théorème II. On a ici, évidemment :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\nu^{(\omega_n)}}{\lambda^{(\omega_n)}} = 1.$$

Un ensemble S est dit *partie isolée, modulo* $2\pi i$, *de* S_a^f (*voir* p. 309), s'il possède les propriétés suivantes : $S \subset S_a^{f,*}$ (*voir* p. 311), et il existe une courbe de Jordan fermée, simple, contenue dans $P_a - S_a^{f,*}$ et contenant, dans son intérieur, S.

Il est clair que, dans l'exemple construit plus haut, aucun point de S_a^f situé sur $\sigma = c (= 0)$ ne fait partie d'une partie isolée, modulo $2\pi i$, de S_a^f (c'est d'ailleurs vrai pour tout point de S_a^f, dans notre exemple). Cette remarque montre que notre exemple illustre aussi les hypothèses du théorème suivant :

Théorème III. — *Si aux hypothèses du théorème* I, *on ajoute l'hypothèse suivante :*

4° *Pour une infinité de valeurs de n on a*

$$\nu^{(\omega_n)} < \infty$$

alors, il existe au moins un point de S_a^f *situé sur* $\sigma = c$ *qui n'appartient à aucune partie isolée, modulo* $2\pi i$, *de* S_a^f.

Théorème IV. — *Si aux hypothèses du théorème* II *on ajoute l'hypothèse* 4° *du théorème* III, *la conclusion du théorème* III *est encore valable.*

Signalons qu'en vertu du lemme 9, on peut faire la remarque suivante :

Remarque. — *Si, dans les théorèmes* I *et* III, *on suppose que* $A(t) = t^k$ $(k > 0)$, *la condition* (25) *est automatiquement satisfaite, et la condition* (27) *est équivalente à la suivante :*

$$\lim_{n=\infty} \delta^{(\omega_n)\frac{1}{\lambda^{(\omega_n)}}} = 1. \tag{30}$$

On peut construire facilement un exemple où toutes les conditions du théorème I sont satisfaites avec $A(t) = t^k$, sauf la condition (27), c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de voir, sauf la condition (30), $S_a^{f,*}$ ne comportant, par exemple, dans chaque bande $T \leqq t < T + 2\pi$, qu'un nombre fini de points — ou même, S_a^f étant un ensemble périodique de période $2\pi i$, tous les points de S_a^f étant des pôles — et pourtant $\nu^{(\omega_n)} = 1$ pour chaque valeur de n.

Soit, en effet, $\Sigma a_n z^n$ une série de Taylor de rayon de convergence égal à 1, admettant dans le cercle $|z| < 2$ un ensemble fermé, donné d'avance (quelques-uns de ces points étant alors sur $|z| = 1$). Soit $0 < \delta_1 < 1$, et posons

$$\lambda_n = n + \delta_1^n \, (n \geqq 1).$$

En écrivant $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, $f_1(s) = \Sigma a_n e^{-ns}$, on a

$$\varphi(s) = f_1(s) - f(s) = \Sigma a_n e^{-ns}(e^{-(\lambda_n - n)s} - 1) = \Sigma a_n e^{-ns}(e^{-\delta_1^n s} - 1).$$

Il est clair que cette somme converge uniformément sur tout compact contenu dans le demi-plan $\sigma > \log \delta_1$. Dans ce demi-plan $\varphi(s)$ est donc holomorphe. On a, d'autre part, pour $0 < a < 1$, $P > 0$, $n \geqq -\log\left(\frac{P}{a}\right)\frac{1}{\log \delta_1} = q$, l'inégalité

$$\delta_1^n P \leqq a < 1,$$

ce qui donne, lorsque $|s| \leqq P$, $\sigma \geqq \sigma_0 > \log \delta_1$:

$$\left| \sum_{n \geqq q} a_n e^{-ns}(e^{-\delta_1^n s} - 1) \right| \leqq L_1 P,$$

où L_1 est inpépendant de P. Comme on a, d'autre part, dans le même domaine, en posant $|a_n| < R^n (R > 1)$:

$$\left| \sum_{n < q} a_n e^{-ns}(e^{-\delta_1^n s} - 1) \right| \leqq L_2 \frac{R^{[q]+1} - 1}{R - 1},$$

on voit que $\varphi(s)$ ne croît pas dans P_{σ_0} plus vite qu'une puissance, tout en y étant holomorphe. Comme $f(s)$ est bornée dans P_{σ_0}, en dehors des singularités, on voit que $f_1(s)$ admet dans P_{σ_0} les mêmes singularités que $f_1(s)$, et croît dans ce demi-plan, en dehors des singularités, moins vite qu'une puissance de $|t|$. Si $f_1(s)$ est choisie à n'avoir que des pôles simples dans P_{σ_0}, $f(s)$ n'y admet pas d'autres singularités non plus. On voit enfin que $\omega_n = \delta_1^n$, $\lambda^{(\omega_n)} = \lambda_n = n + \delta_1^n$, $\delta^{(\omega_n)} = \delta_1^n(1 - \delta_1)$, ainsi donc $\lim \delta^{(\omega_n)\frac{1}{\lambda^{(\omega_n)}}} = \delta_1 < 1$ et $\nu^{(\omega_n)} = 1$.

6. Nous allons maintenant fournir la démonstration des théorèmes énoncés dans le paragraphe précédent.

Démonstration du théorème I. — Supposons que le théorème ne soit pas vrai. Dans ces conditions on peut extraire de la suite $\{\omega_n\}$ une suite partielle, que nous désignerons par $\{\alpha_n\}$, qui jouit des propriétés suivantes :

1° α_n tend d'une manière monotone vers une quantité α; supposons que α_n décroît vers α, un changement insignifiant au raisonnement qui suit suffit pour traiter le cas où α_n croît vers α;

2° $0 < \alpha_n - \alpha < \frac{d}{2+2d}$, où d est l'écart du type Λ, c'est-à-dire $d = \operatorname{Inf}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. On a. par conséquent,

$$\alpha_n - \alpha < \frac{d}{2}, \qquad \alpha_n - \alpha < \frac{1}{2};$$

3° $\lim \frac{\nu^{(\alpha_n)}}{\lambda^{(\alpha_n)}} = 0$;

4° $\lim \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \nu^{(\alpha_k)}}{\lambda^{(\alpha_n)}} = 0$;

5° $\sum \frac{h\left(\frac{\lambda^{(\alpha_n)}}{\delta^{(\alpha_n)}}\right)}{\delta^{(\alpha_n)}} < \infty$;

(6°) $\lambda^{(\alpha_{n+1})}$ est plus grand que le plus grand terme de Λ_{α_n}. Rappelons que Λ_ω désigne l'ensemble des λ_n dont la partie fractionnaire est égale à ω.

7° $\alpha_n - \delta^{(\alpha_n)} > \alpha_{n+1} + \delta^{(\alpha_{n+1})} (n \geqq 1)$.

Désignons par $\Lambda' \equiv \{\lambda'_n\}$ la suite, rangée par ordre de grandeur, composée des termes de $\bigcup_p \Lambda_{\alpha_p}$. Λ' est donc composé de tous les λ_m appartenant à tous les $\Lambda_{\alpha_p} (p \geqq 1)$.

Soit m_n la partie entière de $\lambda'_n - \alpha$, et posons $\mu_n = m_n + \alpha$. On a $\lambda'_n = \mu_n + \varepsilon'_n$, avec $0 < \varepsilon'_n < \frac{d}{2+2d}$, ε'_n tendant vers zéro en décroissant. Posons $\beta_p = \alpha_p - \alpha$. A chaque n correspond un p tel que $\varepsilon'_n = \beta_p$. β_p décroît vers zéro. On voit que m_n croît vers l'infini, et il résulte de 3° et 4° que

$$\lim \frac{n}{m_n} = 0. \tag{31}$$

Désignons par λ_{r_p} un terme de Λ_{α_p}, choisi de telle manière que

$$\lim_p \frac{\log |a_{r_p}|}{\lambda_{r_p}} = c,$$

ce qui est possible en vertu de l'hypothèse 3° de l'énoncé du théorème.

Construisons alors la fonction $F(z)$ du lemme 8, correspondant aux éléments de cet énoncé définis de la manière suivante : $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\eta_n = \delta^{(\alpha_n)}$, $g_n = \lambda_{r_n}$, $C(u) = \log A(u)$ [α et β dont il est question *ici* sont les constantes correspondant à la propriété (15) de la transformée de Fourier de F]. $\{\varepsilon_n\}$ étant la suite intervenant dans (22), posons

$$\Phi(z) = \sum \frac{\eta_n}{n^2} e^{-\varepsilon_n g_n + i\beta_n r} F(\eta_n z).$$

D'après le lemme 8 on peut écrire

$$|\Phi(z)| \leqq (A(|z|))^{-1} e^{c|y|} \sum \frac{1}{n^2} \frac{\eta_n}{1 + \eta_n^2 x^2} = (A|z|))^{-1} e^{c|y|} L(x). \tag{32}$$

où c est une constante et où $L(x)$ est une fonction intégrable tendant vers zéro, lorsque $|x|$ tend vers l'infini. En désignant par $\omega(u)$ la transformée de Fourier de F et par φ celle de Φ, on a, évidemment

$$\varphi(u)=\sum \frac{1}{n^2} e^{-\varepsilon_n g_n} \omega\left(\frac{u-\beta_n}{\eta_n}\right).$$

En tenant alors compte des propriétés de la transformée de Fourier de F (*voir* lemme 8) on voit que

$$\varphi(k_{n,m})=0$$

pour tout nombre $k_{n,m}$ de la forme $\lambda_n - m - \alpha$, à moins que λ_n soit un terme λ'_p de Λ', m étant la partie entière de $\lambda'_p - \alpha$. Si la partie fractionnaire de $\lambda'_p - \alpha$ est égale à β_n on a

$$\varphi(\beta_n)=\frac{1}{n^2} e^{-\varepsilon_n g_n}.$$

Posons

$$\psi(\zeta)=\frac{e^{-\alpha\zeta}}{e^{\zeta}-1}$$

et considérons, pour $\sigma > h$, l'intégrale

$$\Psi(s)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \psi(s-z) f(z)\,\Phi(-iz)\,dz, \tag{33}$$

où h est une constante telle que $h > c$. Les hypothèses du théorème et l'inégalité (32) montrent que cette intégrale a un sens pour $\sigma > h$. On voit aussi, d'après le lemme 10, que $\Psi(s)$ est une fonction holomorphe dans tout domaine $R^{\psi,\chi}_{\nu,a}$ où $\chi(z)$ dénote la fonction $f(z)\Phi(-iz)$, ν étant une quantité négative quelconque.

Comme les seules singularités de ψ sont les points $2k\pi i$, k étant un entier quelconque, la fonction ψ étant bornée dans tout P_a, en dehors des singularités, on voit que les seules singularités de Ψ dans P_a sont les points de $S^{f,*}_a$. $\Psi(s)$ est donc prolongeable analytiquement à travers la droite, $\sigma = c$, elle est holomorphe dans le demi-plan P_c.

On a, pour $R\zeta > 0$

$$\psi(\zeta)=\sum_{1}^{\infty} e^{-(\alpha+n)\zeta}.$$

On peut donc écrire, pour $\sigma \geqq h' > h$, (33) sous la forme suivante :

$$\Psi(s)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\sum_n e^{-(\alpha+n)s}\sum_m a_m \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{(\alpha+n-\lambda_m)z}\,\Phi(-iz)\,dz.$$

Or, en utilisant d'une manière évidente le théorème de Cauchy (en profitant du fait que sur des segments $0 \leqq x \leqq h$, $y = Y$, l'expression sous le signe d'intégrale tend vers zéro lorsque $|Y|$ tend vers l'infini) on voit que

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{(\alpha+h-\lambda_m)z}\,\Phi(-iz)\,dz = i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_m-n-\alpha)y}\,\Phi(y)\,dy.$$

Ainsi, pour $\sigma > h'$ on a

$$\Psi(s) = \sum_n e^{-(\alpha+n)s} \sum_m a_m \varphi(\lambda_m - n - \alpha).$$

D'après les remarques faites plus haut sur la fonction φ, on voit alors que

$$\Psi(s) = \sum_p e^{-\mu_p s} a_{k_p} \frac{1}{\nu_p^2} e^{-\varepsilon_{\nu_p} g_{\nu_p}},$$

où les quantités μ_p, k_p, ν_p sont définies de la manière suivante : on a $\mu_p = m_p + \alpha$, où les entiers croissants m_p sont les parties entières des λ'_p, les λ'_p constituant, comme on se le rappelle, l'ensemble Λ', qui est la rénnion de tous les ensembles $\Lambda_{\alpha_n}(n \geqq 1)$; à chaque μ_p correspond, par conséquent, un entier unique ν_p tel que $\lambda'_p \in \Lambda_{\alpha_{\nu_p}}$, c'est-à-dire tel que

$$\lambda'_p = m_p + \alpha_{\nu_p} = \mu_p + \beta_{\nu_p};$$

dans chaque Λ_{α_n} on a choisi un terme $\lambda_{r_n} = g_n$ tel que

$$\lim \frac{\log|a_{r_n}|}{\lambda_{r_n}} = c;$$

l'entier k_p est alors défini par $k_p = r_{\nu_p}$, k_p est aussi uniquement déterminé à partir de p (donc à partir de μ_p).

Il existe, en particulier, une suite d'entiers positifs, croissants $\{p_n\}$ telle que ν_{p_n} croît, et telle que

$$\mu_{p_n} = m_{p_n} + \alpha,$$
$$\lambda_{r_{p_n}} = g_{\nu_{p_n}} = m_{p_n} + \alpha + \beta_{\nu_{p_n}} \in \Lambda_{\alpha_{\nu_{p_n}}},$$
$$k_{p_n} = r_{\nu_{p_n}},$$
$$\lim \frac{\log|a_{k_{p_n}}|}{\mu_{p_n}} = \lim \frac{\log|a_{k_{p_n}}|}{g_{\nu_{p_n}}} = c.$$

Comme il existe une quantité positive A telle que $n \leqq A\lambda_n$ (le type Λ étant régulier), et comme la suite $\{g_{\nu_{p_n}}\}$ est une suite extraite de la suite $\{\lambda_n\}$, la suite $\{\nu_{p_n}\}$ et la suite $\{g_{\nu_{p_n}}\}$ étant croissantes (d'après la propriété 6° de la page 316), on a $1 \leqq \nu_{p_n} \leqq A\lambda_{\nu_{p_n}} \leqq A g_{\nu_{p_n}}$. On a, par conséquent

$$\lim \frac{\log \nu_{p_n}}{g_{\nu_{p_n}}} = \lim \frac{\log \nu_{p_n}}{m_{p_n}} = 0.$$

La suite $\varepsilon_{\nu_{p_n}}$ tend vers zéro. Par conséquent on peut écrire

$$(34) \qquad \lim \frac{\log|a_{k_p}| - 2\log\nu_{p_n} - \varepsilon_{\nu_{p_n}} g_{\nu_{p_n}}}{m_{p_n}} = c.$$

Posons $e^{-s} = z$, et écrivons $T(z) = \Psi(s)$. $T(z)$ est développable, autour de l'origine en série de la forme

$$(35) \qquad T(z) = z^\alpha \Sigma b_n z^{m_n};$$

cette fonction est holomorphe dans le cercle $|z| \leqq e^{-c}$, car $\Psi(s)$, comme nous l'avons vu, est holomorphe pour $\sigma > c$, le rayon de convergence de la série dans (35) étant égal, d'après (34), au plus à e^{-c}, donc *exactement* à e^{-c}. Il résulte de (31), d'après le théorème de Fabry, que le cercle de convergence est, pour $T(z)$, une coupure, ce qui est en contradiction avec le fait établi plus haut que $\Psi(s)$ est prolongeable à travers la ligne $\sigma = c$. Ainsi notre théorème est complètement démontré si α_n décroît vers α. Si α_n croît vers α, il suffit de remplacer dans (33) $\Phi(-iz)$ par $\Phi(iz)$ pour achever la démonstration.

Le théorème II est, comme nous l'avons vu, un cas particulier du théorème I. Passons donc à la démonstration du théorème III.

Démonstration du théorème III. — Supposons que le théorème ne soit pas vrai. Dans ces conditions, tout point de S_a^f situé sur $\sigma = c$ appartient à une partie isolée, modulo $2\pi i$, de S_a^f. Cela veut dire que tout point de $S_a^{f,\star}$ situé sur $\sigma = c$ fait partie d'un ensemble faisant partie de $S_a^{f,\star}$ tel qu'il existe une courbe de Jordan fermée, simple, contenant cet ensemble, contenue dans P_a, aucun point de $S_a^{f,\star}$ ne se trouvant sur la courbe.

On peut encore extraire de la suite $\{\omega_n\}$ une suite partielle $\{\alpha_n\}$ qui, vu la propriété 4° de l'énoncé du théorème III, jouit des propriétés suivantes : les propriétés 1°, 5° et 7° de la page 316, et la propriété que voici : en désignant par $\lambda_1^{(\alpha_n)}$ le plus grand terme de Λ_{α_n} on a

$$\lim \frac{\lambda^{(\alpha_{n+1})}}{\lambda_1^{(\alpha_n)}} = \infty.$$

En conservant toutes les notations et toutes les opérations qui servaient à la démonstration du théorème I, il suffit de faire les remarques suivantes : d'après ce que nous venons de dire sur les points de $S_a^{f,\star}$ sur $\sigma = c$ (si l'on suppose que le théorème est faux !), la fonction $T(z)$ n'admet sur son cercle de convergence, $|z| = e^{-c}$, que des points singuliers dont chacun peut être entouré par une courbe de Jordan située dans le cercle $|z| < e^{-a}$ sur laquelle $T(z)$ est holomorphe ; on a, d'autre part,

$$T(z) = z^\alpha \Sigma b_n z^{m_n},$$

où la suite $\{m_n\}$ possède, cette fois-ci, la propriété qui peut s'exprimer ainsi : il existe une suite $\{m_{n_p}\}$ extraite de la suite $\{m_n\}$ avec

$$\lim \frac{m_{n_{k+1}}}{m_{n_k}} = \infty.$$

Or, d'après un théorème d'Ostrowski [8], le domaine d'existence d'une fonction, dont le développement de Taylor admet de telles lacunes, est nécessairement simplement connexe. D'où la contradiction, et le théorème est démontré.

Nous savons que le théorème IV est un cas particulier du théorème III.

Ainsi tous les théorèmes énoncés sont démontrés.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Agmon, *A composition theorem for Dirichlet series* (*Journal d'Analyse Mathématique*, vol. 1, IIe partie, 1951).

[2] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[3] N. Levinson, *Gap and Density Theorems* (*Amer. Math. Soc. Colloq. publications*, vol. 26, 1940).

[4] S. Mandelbrojt, *Contribution à la théorie du prolongement analytique des séries de Dirichlet* (*Acta Math.*, t. 55, 1929).

[5] S. Mandelbrojt, *Analytic Functions and Classes of infinitely differentiable functions* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. 29, nº 1, 1942).

[6] S. Mandeldrojt, *Dirichlet Series* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. 31, nº 4, 1944).

[7] S. Mandelbrojt, *Some theorems connected with the theory of infinitely differentiable functions* (*Duke Math.*, vol. 11, nº 2, 1944).

[8] A. Ostrowski, *Ueber Potenzreihen die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen* (*Berl. Sitz. der Akademie*, 1921).

ERRATA.

Trisectrices des angles d'un triangle,

par M. B. Gambier.

(*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 71, 1954, p. 191.)

Page 193, 6e ligne en remontant, *au lieu de* $\gamma_{2,A}$, *lire* $\gamma_{l,A}$.