

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROBERT CROISOT

Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 70, n° 4 (1953), p. 361-379

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_4_361_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEMI-GROUPES INVERSIFS

ET

DEMI-GROUPES RÉUNIONS

DE

DEMI-GROUPES SIMPLES

PAR M. R. CROISOT.

Introduction.

Dans un Mémoire paru en 1941 [cf. note (⁵)], A. H. Clifford a étudié les demi-groupes qui sont *réunions de groupes*. Il a montré, en particulier, qu'un tel demi-groupe D est réunion de demi-groupes complètement simples disjoints qui sont ses sous-demi-groupes simples maximaux, la partition de D ainsi déterminée étant telle que l'équivalence \mathcal{R} correspondante soit régulière et que le demi-groupe quotient D/\mathcal{R} soit un demi-treillis. Une grande partie de la démonstration peut être faite sous une hypothèse plus faible, imposant seulement à tout idéal bilatère de D d'être semi-premier (¹). On voit alors, d'une part, que cette hypothèse entraîne que D est *réunion de demi-groupes simples* (cf. théorème 4) et, d'autre part, qu'un demi-groupe réunion de demi-groupes simples est réunion de demi-groupes simples disjoints qui sont ses sous-demi-groupes simples maximaux, l'équivalence \mathcal{R} correspondante étant encore régulière et D/\mathcal{R} étant encore un demi-treillis (cf. propriétés 8 et 9). Ayant obtenu ce résultat, il était naturel d'étudier le cas intermédiaire où l'on impose aux idéaux à gauche (par exemple) de D d'être semi-premiers. On voit

(¹) Cette hypothèse est plus faible que la précédente car on voit qu'un demi-groupe est réunion de groupes si et seulement si tous ses idéaux à gauche et à droite sont semi-premiers (cf. corollaire 4 du théorème 4).

que cette condition est équivalente au fait que D soit *réunion de demi-groupes simples à gauche* (*cf.* théorème 3). Mais, bien que D soit alors réunion de demi-groupes simples à gauche disjoints, ses sous-demi-groupes simples à gauche maximaux, l'équivalence \mathcal{R}_s correspondante n'est pas nécessairement régulière.

Ce cas intermédiaire qui est, à ce point de vue, moins intéressant que les deux autres, car il semble que les demi-groupes simples réunions de demi-groupes simples à gauche puissent être très compliqués, se rattache à un autre ordre de questions. Il est en effet à peu près immédiat (*cf.* propriété 5) que tous les idéaux à gauche d'un demi-groupe D sont semi-premiers si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

(0, 2) Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = ux^2$.

Cette condition est à rapprocher de la condition

(1, 1) Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = xux$

introduite récemment par G. Thierrin [*cf.* note (2)] qui appelle demi-groupes *inversifs* les demi-groupes qui la vérifient. Par analogie, j'appelle demi-groupes *inversifs à gauche* les demi-groupes qui vérifient la condition (0, 2) et demi-groupes *inversifs à droite* les demi-groupes qui vérifient la condition symétrique (2, 0). Ce rapprochement suggère l'étude plus générale des demi-groupes qui satisfont à une condition du type suivant (avec m et n entiers positifs ou nuls) :

(m, n) Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = x^m ux^n$.

Le paragraphe I de ce travail est consacré en grande partie à la classification des demi-groupes vérifiant une ou plusieurs des conditions (m, n) avec $m + n > 1$ et des conditions citées plus haut.

Les conditions (m, n) sont toutes vérifiées dans un demi-groupe qui est réunion de groupes, en particulier dans un groupe et dans un demi-treillis. Dans le paragraphe II, j'étudie certains renforcements de ces conditions. Je précise d'abord quels sont les demi-groupes qui satisfont à l'une de ces conditions avec, de plus, *l'unicité*, pour chaque élément x , de l'élément u vérifiant l'égalité $x = x^m ux^n$. Dans un autre ordre d'idées, si l'on se limite aux conditions (1, 1), (0, 2) et (2, 0), on constate que, dans un groupe, les rôles de x et u peuvent être échangés, ces deux éléments étant inverses l'un de l'autre. Je détermine quels sont les demi-groupes vérifiant une de ces conditions et, en même temps, cette *propriété de réciprocity*. Finalement, en considérant l'une quelconque des conditions (m, n), on voit que les demi-treillis satisfont à une propriété supplémentaire que l'on peut nommer *anti-réciprocity* : $x = x^m ux^n$ et $u = u^m xu^n$ entraînent $x = u$. Je détermine quels sont les demi-groupes qui vérifient une des conditions (m, n) renforcée par cette *propriété d'anti-réciprocity* [sauf dans les cas (0, n) et ($m, 0$) où de tels demi-groupes peuvent être très compliqués].

I. — Classification des demi-groupes considérés : équivalences et implications liant les conditions qui servent à les définir.

Nous considérons trois familles de conditions susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe D.

a. La première famille se compose des conditions, représentées par les symboles (m, n) où m et n sont des entiers positifs ou nuls et définies de la façon suivante :

(m, n) Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = x^m u x^n$.

On convient que, dans le cas où m (ou n) est nul, x^m (ou x^n) doit être supprimé au second membre de cette égalité. La condition $(0, 0)$ est évidemment triviale; la condition $(0, 1)$ exprime que chaque élément de D possède un élément unité à gauche et la condition $(1, 0)$ exprime que chaque élément de D possède un élément unité à droite; nous étudierons seulement les conditions pour lesquelles on a $m + n > 1$. Les demi-groupes vérifiant la condition $(1, 1)$ sont les demi-groupes *inversifs* ⁽²⁾; par analogie, nous poserons les définitions suivantes :

Définition 1. — Un demi-groupe *inversif à gauche* est un demi-groupe vérifiant la condition

$(0, 2)$ Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = u x^2$.

Définition 2. — Un demi-groupe *inversif à droite* est un demi-groupe vérifiant la condition

$(2, 0)$ Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = x^2 u$ ⁽³⁾.

b. La seconde famille se compose des quatre conditions suivantes :

(J) Tout idéal (à gauche, à droite ou bilatère) de D est *semi-premier* ⁽⁴⁾;

(IG) Tout idéal à gauche de D est *semi-premier*;

(ID) Tout idéal à droite de D est *semi-premier*;

(I) Tout idéal bilatère de D est *semi-premier*.

⁽²⁾ Ces demi-groupes ont été introduits par G. THIERRIN, *Comptes rendus*, t. 232, 1951, p. 376.

⁽³⁾ Naturellement, la classe des demi-groupes inversifs ne coïncide pas avec celle des demi-groupes qui sont à la fois inversifs à gauche et inversifs à droite. En fait, deux des trois conditions $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ entraînent la troisième et il n'y a pas d'autre relation entre ces conditions (voir plus loin le tableau de la figure 1).

⁽⁴⁾ Un idéal I (à gauche, à droite ou bilatère) de D est dit *semi-premier* s'il vérifie la condition

$$x^2 \in I \Rightarrow x \in I.$$

Il en résulte immédiatement que l'on a $x \in I$ dès que l'on a $x^n \in I$, quel que soit n entier positif.

c. La troisième famille comprend également quatre conditions :

- (G) D est réunion de groupes ⁽⁵⁾;
- (SG) D est réunion de demi-groupes simples à gauche;
- (SD) D est réunion de demi-groupes simples à droite;
- (S) D est réunion de demi-groupes simples.

Nous allons montrer, grâce aux propriétés et théorèmes suivants, que toutes ces conditions se réduisent à cinq conditions logiquement distinctes.

PROPRIÉTÉ 1. — Les conditions (o, n) pour $n \geq 2$ sont équivalentes entre elles.

Il est trivial que (o, n) entraîne (o, q) pour $q \leq n$. D'autre part, avec $n \geq 2$, (o, n) entraîne $(o, 2n - 1)$ car l'égalité $x = ux^n$ permet d'écrire

$$x = (ux)x^{n-1} = (u^2x^n)x^{n-1} = u^2x^{2n-1};$$

par suite, (o, n) avec $n \geq 2$ entraîne $(o, n + 1)$, d'où l'on déduit, par induction, que $(o, 2)$ entraîne (o, n) pour tout $n \geq 2$.

PROPRIÉTÉ 2. — Les conditions $(1, n)$ pour $n \geq 2$ sont équivalentes entre elles.

La démonstration est analogue à celle de la propriété 1, l'égalité $x = xux^n$ permettant d'écrire

$$x = (xux)x^{n-1} = (xuxux^n)x^{n-1} = (xuxu)x^{2n-1}.$$

PROPRIÉTÉ 3. — Les conditions (m, n) pour $m \geq 2$ et $n \geq 2$ sont équivalentes entre elles.

Évidemment, (m, n) entraîne (p, q) pour $p \leq m$ et $q \leq n$. D'autre part, (m, n) avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$ entraîne $(2m - 1, 2n - 1)$ car, de l'égalité $x = x^m ux^n$, on déduit

$$x = x^{m-1}(xux)x^{n-1} = x^{m-1}(x^m ux^n ux^m ux^n)x^{n-1} = x^{2m-1}(ux^n ux^m u)x^{2n-1};$$

donc (m, n) avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$ entraîne $(m + 1, n)$ et $(m, n + 1)$, d'où résulte, par double induction, que $(2, 2)$ entraîne (m, n) pour tout $m \geq 2$ et tout $n \geq 2$.

PROPRIÉTÉ 4. — La condition $(1, 2)$ est équivalente à la conjonction des conditions $(1, 1)$ et $(o, 2)$.

Il est évident que $(1, 2)$ entraîne $(1, 1)$ et $(o, 2)$. Réciproquement, si un demi-groupe D vérifie $(1, 1)$ et $(o, 2)$, pour tout $x \in D$, on peut trouver $a \in D$ et $b \in D$ satisfaisant aux égalités $x = xax$ et $x = bx^2$; on en déduit

$$x = xa(bx^2) = x(ab)x^2,$$

donc D vérifie $(1, 2)$.

⁽⁵⁾ Les demi-groupes vérifiant la condition (G) ont été étudiés par A. H. CLIFFORD, *Ann. of Math.*, t. 41, 1941, p. 1037-1049.

PROPRIÉTÉ 5. — *La condition (0, 2) est équivalente à la condition (IG).*

Si (0, 2) est vérifiée dans un demi-groupe D, et si un idéal à gauche de D contient x^2 , il contient tout élément de Dx^2 , donc en particulier x . Réciproquement, si un demi-groupe D vérifie (IG), quel que soit $x \in D$, l'idéal à gauche Dx^2 , qui contient x^2 , contient aussi x , d'où l'existence de u satisfaisant à (0, 2).

COROLLAIRE. — *La conjonction des conditions (0, 2) et (2, 0) est équivalente à la condition (J).*

Ceci résulte de la propriété 5 et de la propriété symétrique et du fait que la condition (J) équivaut à la conjonction des conditions (IG) et (ID).

Par analogie avec la propriété 5, nous avons la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6. — *La condition (I) peut se mettre sous la forme*

(I') *Pour tout $x \in D$, il existe $a \in D$ et $b \in D$ tels que l'on ait $x = ax^2b$.*

En effet, si un demi-groupe D vérifie (I), pour tout $x \in D$, l'idéal Dx^2D qui contient x^2 doit contenir x , d'où l'existence de a et b satisfaisant à (I'). Réciproquement, si (I') est vérifiée dans un demi-groupe D, et si un idéal de D contient x^2 , il contient tout élément de Dx^2D , donc en particulier x .

THÉORÈME 1. — *Un demi-groupe à la fois inversif à gauche et inversif à droite est réunion de groupes et réciproquement.*

Si un demi-groupe D est réunion de groupes, il vérifie les conditions (0, 2) et (2, 0) : il suffit de prendre pour élément u l'élément inverse de l'élément x dans un groupe auquel appartient x . Réciproquement, considérons un demi-groupe D satisfaisant aux conditions (0, 2) et (2, 0) : à tout élément $x \in D$, nous pouvons faire correspondre $a \in D$ et $b \in D$ tels que l'on ait $x = ax^2$ et $x = x^2b$; on peut écrire

$$(ax)(xb) = a(xxb) = ax = (axx)b = xb,$$

d'où résulte que l'élément $e = ax = xb$ est idempotent. Les égalités

$$x = (ax)x = ex \quad \text{et} \quad x = x(xb) = xe$$

montrent que cet idempotent est élément unité à gauche et à droite pour x . De plus, l'élément axb satisfait aux relations

$$\begin{aligned} (axb)x &= a(xb)x = a(ax)x = ax = e, \\ x(axb) &= x(ax)b = x(xb)b = xb = e \end{aligned}$$

qui montrent qu'il constitue un inverse relatif pour x . Par suite, le demi-groupe D est réunion de groupes ⁽⁶⁾.

(6) Cf. A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de groupes, il faut et il suffit que tous ses idéaux (à gauche, à droite et bilatères) soient semi-premiers.*

D'après le théorème 1 et le corollaire de la propriété 5, ces deux conditions sont, en effet, équivalentes à la conjonction des conditions (0, 2) et (2, 0).

COROLLAIRE 2. — *La condition (2, 2) est équivalente à la conjonction des conditions (0, 2) et (2, 0) et à la condition (G).*

En effet, la condition (2, 2) entraîne les conditions (0, 2) et (2, 0). Réciproquement, si un demi-groupe vérifie la condition (G), il vérifie la condition (2, 2) : il suffit de prendre pour u le cube de l'élément inverse de x dans un groupe auquel appartient x .

THÉORÈME 2. — *Un demi-groupe à la fois inversif et inversif à gauche est réunion de groupes et réciproquement.*

Si un demi-groupe est réunion de groupes, il vérifie les conditions (1, 1) et (0, 2) en prenant pour u l'élément inverse de x dans un groupe auquel appartient x . Pour établir la réciproque, nous pouvons considérer, d'après la propriété 4, un demi-groupe D qui vérifie la condition (1, 2); quel que soit $x \in D$, nous pouvons trouver $y \in D$ satisfaisant à l'égalité

$$(1) \quad x = xyx^2;$$

d'après la propriété 2, le demi-groupe D vérifie la condition (1, 3) et, à l'élément yx , nous pouvons associer un élément z satisfaisant à l'égalité

$$(2) \quad yx = (yx)z(yx)^2;$$

d'après (1), nous pouvons écrire

$$(3) \quad (yx)^2x = (yx)y(xy x^2) = (yx)^2$$

d'où résulte, en utilisant d'abord (1) et (2),

$$(4) \quad x = x(yx)x = x(yxz(yx)^2)x = (xyxz)(yx)^2x = (xyxz)(yx)^2;$$

d'après la condition (1, 2), à l'élément $(yx)^2$, correspond un élément t vérifiant l'égalité

$$(yx)^2 = (yx)^2t(yx)^2$$

dont on déduit d'après (4)

$$x = (xyxz)(yx)^2 = (xyxz)(yx)^2t(yx)^2 = xt(yx)^2;$$

de cette égalité, résulte, compte tenu de (3),

$$x^2(yx) = x(xy x) = xt(yx)^2(xy x) = xt(yx)^2((yx)^2x)(yx) = xt(yx)^2x = x,$$

ce qui montre que la condition (2, 0) est vérifiée par le demi-groupe D qui est donc une réunion de groupes d'après le théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Un demi-groupe inversif dans lequel tout idéal à gauche est semi-premier est une réunion de groupes et réciproquement.*

Ceci résulte immédiatement de la propriété 5 et du théorème 2.

COROLLAIRE 2. — *La condition (1, 2) est équivalente à la condition (2, 2).*

C'est une conséquence du théorème 2 et du corollaire 2 du théorème 1.

LEMME 1. — *Soit D un demi-groupe dans lequel tout idéal à gauche est semi-premier. En désignant par \mathcal{R}_g la relation d'équivalence définie par*

$$x \equiv y (\mathcal{R}_g) \Leftrightarrow Dx = Dy,$$

chaque classe de la partition correspondant à \mathcal{R}_g est un sous-demi-groupe simple à gauche de D.

Soit a un élément quelconque de D; posons $Da = I$ et considérons l'ensemble S des éléments $x \in D$ tels que l'on ait $Dx = I$. Quel que soit $x \in S$, on a $x^2 \in S$ car l'inclusion $Dx^2 \subseteq Dx$ est évidente et l'inclusion $Dx \subseteq Dx^2$ résulte du fait que l'idéal à gauche Dx^2 est semi-premier. De là, on déduit l'égalité

$$Ix = Dx^2 = Dx = I$$

qui montre que S est un sous-demi-groupe de D car, quels que soient $x \in S$ et $y \in S$, on a

$$Dxy = Iy = I.$$

Montrons que S est un demi-groupe simple à gauche. Pour tout $x \in S$ et tout $y \in S$, de l'égalité $Ix = I$ et du fait que y appartient à $Dy = I$, on déduit l'existence de $i \in I$ tel que l'on ait $ix = y$; or, l'égalité $Dy = I$ prouve que l'élément i peut se mettre sous la forme $i = dy$ avec $d \in D$. Le demi-groupe D vérifiant la condition (0, 2) d'après la propriété 5, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $d = ud^2$. Nous pouvons donc écrire

$$y = ix = (dy)x = d(yx) = (ud^2)(yx) = (ud)(dyx) = (ud)y = u(dy) = ui$$

d'où l'on déduit l'inclusion $Dy \subseteq Di$ ce qui, compte tenu de l'inclusion évidente $Di = Ddy \subseteq Dy$, entraîne $Di = Dy$, c'est-à-dire $i \in S$.

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de demi-groupes simples à gauche, il faut et il suffit que tous ses idéaux à gauche soient semi-premiers, c'est-à-dire qu'il soit inversif à gauche.*

La condition est suffisante d'après le lemme 1 et elle est nécessaire car un demi-groupe qui est réunion de demi-groupes simples à gauche vérifie la condition (0, 2).

COROLLAIRE. — *Un demi-groupe inversif qui est en même temps réunion de demi-groupes simples à gauche est réunion de groupes et, par suite, réunion de demi-groupes simples à gauche inversifs.*

C'est une conséquence des théorèmes 2 et 3.

Remarque. — Dans l'hypothèse du lemme 1, deux éléments d'un même sous-demi-groupe simple à gauche de D sont nécessairement équivalents modulo \mathcal{R}_g . Il en résulte que tout sous-demi-groupe simple à gauche de D est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal unique, son saturé par \mathcal{R}_g , et que deux sous-demi-groupes simples à gauche maximaux distincts sont disjoints.

En fait, cette propriété est valable sans hypothèse sur D :

PROPRIÉTÉ 7. — *Dans un demi-groupe D quelconque, tout sous-demi-groupe simple à gauche, s'il en existe, est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal unique et deux sous-demi-groupes simples à gauche maximaux distincts sont disjoints.*

La réunion des sous-demi-groupes simples à gauche d'une chaîne croissante (par rapport à la relation d'inclusion) de sous-demi-groupes simples à gauche est un sous-demi-groupe simple à gauche. Par suite, d'après le théorème de Zorn, tout sous-demi-groupe simple à gauche est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal. Le reste de la propriété 7 résulte du fait que le sous-demi-groupe R engendré par la réunion de deux sous-demi-groupes simples à gauche S et T ayant un élément commun a est simple à gauche : en effet, on a $Ra \supseteq Sa = S$ et $Ra \supseteq Ta = T$, d'où $Ra \supseteq R$ et par suite $Ra = R$; on en déduit, pour tout $s \in S$, $Rs = R$ et, pour tout $t \in T$, $Rt = R$; chaque élément $r \in R$ étant le produit d'un nombre fini d'éléments de S et d'éléments de T , ceci entraîne $Rr = R$, c'est-à-dire que R est simple à gauche.

LEMME 2. — *Soit D un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. Quels que soient $u \in D$, $v \in D$, on a les relations :*

- | | |
|-----|------------------|
| (1) | $Du^2D = DuD,$ |
| (2) | $DuvD = DvuD,$ |
| (3) | $DuDDvD = DvuD.$ |

La relation (1) résulte immédiatement du fait que l'idéal Du^2D est semi-premier.

L'idéal $DuvD$ contient $vuv = (vu)^2$ donc aussi vu et, de même, l'idéal $DvuD$ contient uv , d'où la relation (2).

L'idéal $DuDDvD$ contient $vuvuv = (vu)^3$, donc aussi vu ; d'autre part, pour tout $d \in D$, l'idéal $DvuD$ contient $(ud)vu(dv) = (udv)^2$, donc aussi udv et par suite tout élément de $uDDv$ et de $DuDDvD$, ce qui établit la relation (3).

LEMME 3. — Soit D un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. En désignant par \mathcal{R} la relation d'équivalence définie par

$$x \equiv y(\mathcal{R}) \Leftrightarrow Dx D = Dy D,$$

chaque classe de la partition correspondant à \mathcal{R} est un sous-demi-groupe simple de D .

Si l'on a $x \equiv y(\mathcal{R})$, les relations (3) et (1) du lemme 2 entraînent

$$Dxy D = Dy DDx D = Dx DDx D = Dx^2 D = Dx D, \quad \text{d'où} \quad xy \equiv x(\mathcal{R}),$$

ce qui montre que chaque classe modulo \mathcal{R} est un sous-demi-groupe de D .

Ce demi-groupe est simple : en effet, si l'on pose $Dx D = I$, on a $IxI = I$ car l'idéal semi-premier IxI , évidemment inclus dans I , contient x ; par suite, la relation $x \equiv y(\mathcal{R})$ entraîne l'existence de $h \in I$ et $k \in I$ tels que l'on ait $h x k = y$, d'où résulte $y \in Dh D$ puisque cet idéal contient h ; on en déduit $Dh D = I$, c'est-à-dire $x \equiv h(\mathcal{R})$ et l'on établit de même $x \equiv k(\mathcal{R})$.

THÉOREME 4. — Pour qu'un demi-groupe soit réunion de demi-groupes simples, il faut et il suffit que tous ses idéaux bilatères soient semi-premiers.

La condition est suffisante d'après le lemme 3 et elle est nécessaire d'après la propriété 6 car un demi-groupe qui est réunion de demi-groupes simples vérifie la condition (1').

La propriété suivante est conséquence immédiate du lemme 3 :

PROPRIÉTÉ 8. — Dans un demi-groupe D qui est réunion de sous-demi-groupes simples, tout sous-demi-groupe simple est inclus dans un sous-demi-groupe simple maximal unique et deux sous-demi-groupes simples maximaux distincts sont disjoints ⁽¹⁾.

Il suffit, en effet, de remarquer que deux éléments d'un même sous-demi-groupe simple sont nécessairement équivalents modulo \mathcal{R} .

La propriété suivante précise, dans une certaine mesure, la structure des demi-groupes qui sont réunion de sous-demi-groupes simples :

PROPRIÉTÉ 9. — D étant un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier, l'équivalence \mathcal{R} définie dans le lemme 2 est régulière et le demi-groupe-quotient D/\mathcal{R} est un demi-treillis ⁽⁸⁾.

La régularité de \mathcal{R} résulte de la relation (3) du lemme 2 et le demi-groupe-quotient D/\mathcal{R} est un demi-treillis d'après les relations (1) et (2) de ce lemme.

⁽¹⁾ J'ignore si la propriété 8 est valable (comme la propriété 7) sans hypothèse sur D .

⁽⁸⁾ La démonstration des lemmes 2 et 3 et de la propriété 9 n'est qu'une adaptation de la démonstration que fait A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, dans l'étude de la structure des demi-groupes qui sont réunions de groupes.

En groupant les résultats précédents et éventuellement les résultats symétriques, il nous reste cinq conditions logiquement différentes :

a. *D est réunion de groupes*, ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (G), (J), (m, n) avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$, $(1, n)$ avec $n \geq 2$, $(m, 1)$ avec $m \geq 2$.

b. *D est inversif à gauche*, ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (SG), (IG), $(0, n)$ avec $n \geq 2$.

c. *D est inversif à droite*, ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (SD), (ID), $(m, 0)$ avec $m \geq 2$.

d. *D est inversif*, ce qui se traduit par la condition $(1, 1)$.

e. *D est réunion de demi-groupes simples*, ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (S), (I), (I').

Avant de résumer dans un tableau les implications liant ces cinq conditions, nous démontrons la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 10. — *Un demi-groupe qui est à la fois inversif et réunion de demi-groupes simples est réunion de demi-groupes simples inversifs.*

Soit *D* un tel demi-groupe. Nous montrons que les classes modulo \mathcal{R} définies dans le lemme 3 sont des demi-groupes inversifs : x étant un élément d'une telle classe *X*, puisque *D* est inversif, nous pouvons trouver $u \in D$ vérifiant l'égalité $x = xux$; cette égalité entraîne $x = (xux)ux = x(uxu)x$; en désignant par *U* la classe modulo \mathcal{R} de l'élément u , nous avons, dans le demi-groupe-quotient D/\mathcal{R} qui est un demi-treillis d'après la propriété 9,

$$X = XUX = XU \quad \text{et} \quad UXU = XU = X,$$

ce qui montre que l'élément uxu appartient à *X*; par conséquent, le demi-groupe simple *X* est inversif.

Dans le tableau de la figure 1, nous avons ajouté aux cinq conditions précédentes la condition

(SI) *D est réunion de demi-groupes simples inversifs*

qu'on peut encore mettre sous la forme

(SI') *Pour tout $x \in D$, il existe $a \in D$ et $b \in D$ tels que l'on ait $x = xax^2bx$.*

Grâce à cette adjonction, le tableau est un sous-demi-treillis (par rapport à la conjonction logique) du treillis des conditions susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe. Pour nous en assurer, nous utiliserons, d'une part, quatre contre-exemples destinés à montrer que les six conditions examinées sont effectivement distinctes, d'autre part, la propriété 10, le théorème 1, le théorème 2 et le symétrique du théorème 2 qui montrent que l'on a bien un sous-demi-treillis du treillis des conditions.

Exemple 1. — Le demi-groupe de Baer et Levi ⁽⁹⁾ est simple à gauche; par conséquent, il est inversif à gauche. Il n'est ni inversif ni inversif à droite car chacune de ces conditions entraîne, pour chaque élément, l'existence d'un élément unité à droite, ce qui n'est pas vérifié ⁽¹⁰⁾.

Exemple 2. — Le produit du demi-groupe de Baer et Levi et d'un demi-groupe anti-isomorphe au demi-groupe de Baer et Levi est simple; donc, il vérifie la condition (S). Il ne vérifie pas les conditions (1, 1), (0, 2), (2, 0) puisque le demi-groupe de Baer et Levi ne vérifie pas les conditions (1, 1) et (2, 0).

Exemple 3. — Le demi-groupe de toutes les applications d'un ensemble E dans lui-même est inversif; en effet, soit α une de ces applications et considérons

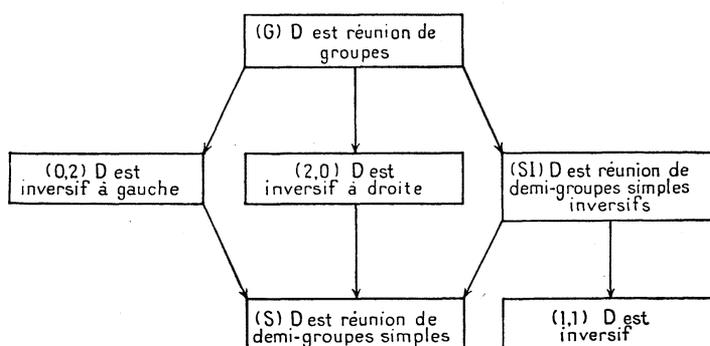


Fig. 1.

une application β telle que l'on ait $\beta(x) \in \alpha^{-1}(x)$, pour tout $x \in \alpha(E)$; il existe évidemment toujours au moins une application vérifiant cette condition et elle satisfait à l'égalité $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Ce demi-groupe n'est pas réunion de demi-groupes simples si E possède au moins trois éléments car il ne vérifie pas alors la condition (I') de la propriété 6; en effet, soient x et y deux éléments distincts de E et soit α l'application définie par $\alpha(x) = \alpha(y) = x$ et $\alpha(z) = y$ pour tout élément z de E différent de x et y ; on a $\alpha^2(x) = \alpha^2(y) = \alpha^2(z) = x$, donc l'application α^2 est une application constante; par suite, quelles que soient les applications β et γ , l'application $\gamma\alpha^2\beta$ est également une application constante qui ne peut donc être égale à α .

⁽⁹⁾ Cf. R. BAER et F. LEVI, *Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wissenschaften*, t. 18, 1932, p. 7. On entend d'ordinaire sous le nom de demi-groupe de Baer et Levi un demi-groupe plus général que celui qui a été utilisé par ces auteurs : il s'agit du demi-groupe de toutes les applications biunivoques α d'un ensemble E infini dans lui-même telles que le complémentaire de $\alpha(E)$ dans E ait une puissance déterminée au moins égale au dénombrable. Cf. M. TEISSIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1120.

⁽¹⁰⁾ Cf. M. TEISSIER, *loc. cit.*, II, 2°.

Exemple 4. — E étant un ensemble infini quelconque, nous considérons les applications α de E dans E satisfaisant à la condition suivante :

(F) Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\alpha^{-1}(x)$, s'il n'est pas vide, est fini ⁽¹¹⁾.

Il est immédiat que ces applications forment un sous-demi-groupe D du demi-groupe de toutes les applications de E dans E. Nous allons montrer que le demi-groupe D vérifie la condition (SI) sans vérifier les conditions (o, 2) et (2, o). Pour cela, nous établissons successivement que D est simple, qu'il est inversif et qu'il n'est pas réunion de groupes.

D'après la condition (F), quel que soit $\alpha \in D$, l'ensemble $\alpha(E)$ est équipotent à E. Considérons deux éléments quelconques, α et β , de D et montrons qu'il est possible de trouver deux éléments, γ et δ , de D tels que l'on ait $\beta = \delta\alpha\gamma$. Les ensembles $\beta(E)$ et $\alpha(E)$ étant équipotents d'après la remarque précédente, nous pouvons déterminer une application biunivoque π de $\beta(E)$ sur $\alpha(E)$. Considérons d'autre part une application τ (évidemment biunivoque) de $\alpha(E)$ dans E vérifiant $\tau(x) \in \alpha^{-1}(x)$ pour tout $x \in \alpha(E)$. Posons $\gamma = \tau\pi\beta$ et déterminons δ de façon à ce que sa trace sur $\alpha(E)$ coïncide avec π^{-1} et de façon à ce que la condition (F) soit réalisée, ce qui est toujours possible; nous aurons alors $\delta\alpha = \pi^{-1}\alpha$ et nous pourrions écrire

$$\delta\alpha\gamma = \pi^{-1}\alpha\tau\pi\beta = \pi^{-1}(\alpha\tau)\pi\beta = \pi^{-1}\pi\beta = \beta,$$

ce qui montre que D est simple.

Quel que soit $\alpha \in D$, nous pouvons déterminer une application β de E dans E satisfaisant à la condition (F) et telle que l'on ait $\beta(x) \in \alpha^{-1}(x)$ pour tout $x \in \alpha(E)$. Nous avons $\alpha\beta\alpha = \alpha$ et par suite D est inversif.

D n'est pas réunion de groupes. En effet, puisque D est simple, s'il était réunion de groupes, il serait complètement simple ⁽¹²⁾. Il ne peut en être ainsi car nous pouvons trouver dans D un idempotent non primitif : les idempotents de D sont les applications ε de E dans E vérifiant la condition (F) et la condition suivante :

(G) Pour tout $x \in \varepsilon(E)$, on a $\varepsilon(x) = x$;

ε étant l'un quelconque de ces idempotents, on peut trouver un idempotent φ différent de ε tel que l'on ait $\varphi\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi$; il suffit pour cela que φ satisfasse aux conditions supplémentaires $\varphi(E) \subset \varepsilon(E)$ et $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

Remarque. — Si D est un demi-groupe fini qui soit réunion de demi-groupes simples, il est réunion de groupes : en effet, tout demi-groupe simple fini

⁽¹¹⁾ Il suffirait d'une condition plus faible que la condition (F) :

Pour tout $x \in E$, la puissance de l'ensemble $\alpha^{-1}(x)$ est bornée par une puissance fixe strictement inférieure à celle de E.

⁽¹²⁾ Cf. A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, lemme 2,7.

contient un idempotent, donc il contient un idempotent primitif; par suite, il est complètement simple et est donc réunion de groupes. Il en résulte que, dans le cas d'un demi-groupe fini, les conditions (G), (0, 2), (2, 0), (SI) et (S) sont équivalentes; la condition (1, 1) est plus faible qu'elles comme le montre l'exemple 3 qui peut être fini.

II. — Étude des demi-groupes définis par certains renforcements des conditions (m, n) .

Nous considérons d'abord les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) auxquels on impose, de plus, pour tout x , l'unicité de l'élément u satisfaisant à la condition (m, n) . Nous dirons qu'un tel demi-groupe vérifie la condition (m, n) avec unicité. Nous appellerons, en particulier, demi-groupes inversifs (ou inversifs à gauche, ou inversifs à droite) avec unicité les demi-groupes qui vérifient la condition (1, 1) [ou la condition (0, 2), ou la condition (2, 0)] avec unicité.

THÉORÈME 5. — *Les seuls demi-groupes inversifs avec unicité sont les groupes.*

Un demi-groupe inversif avec unicité ne peut posséder deux idempotents distincts. En effet, soient deux idempotents e et f d'un tel demi-groupe D . Il existe un élément $g \in D$ vérifiant l'égalité $(ef)g(ef) = ef$; or, on sait que, si l'élément u qui satisfait à $xux = x$ est unique, on a $uxu = u$ ⁽¹³⁾; par suite, l'élément g vérifie aussi l'égalité $g(ef)g = g$. Mais, $(ef)g(ef) = ef$ peut s'écrire

$$(ef)(fg)(ef) = ef \quad \text{et} \quad (ef)(ge)(ef) = ef,$$

d'où résulte $fg = ge = g$ d'après la condition d'unicité. On en tire $(ge)(fg) = g^2$, ce qui, compte tenu de $g(ef)g = g$ implique que g est un idempotent. Par suite, on a $ggg = g$ et l'on en déduit $ef = g$ en utilisant encore la relation $g(ef)g = g$ et la condition d'unicité. L'élément ef étant un idempotent, on peut écrire

$$(ef)e(ef) = ef \quad \text{et} \quad (ef)f(ef) = ef,$$

d'où résulte $e = f$ d'après la condition d'unicité.

Un demi-groupe inversif avec unicité D possédant au moins un idempotent, il en possède un et un seul que nous désignons par e . Soit x un élément quelconque de D et u l'élément de D qui lui correspond par la condition (1, 1). De $xux = x$, résulte $xu = ux = e$ qui est donc élément unité de D par rapport auquel tout élément de D admet un élément inverse. Par suite, D est un groupe.

THÉORÈME 6. — *Les seuls demi-groupes vérifiant l'une des conditions $(0, n)$*

(13) Cf. G. THIERRIN, *loc. cit.*

pour $n \geq 2$ avec unicité sont les groupes à gauche ⁽¹⁴⁾. En particulier, les seuls demi-groupes inversifs à gauche avec unicité sont les groupes à gauche.

Un demi-groupe D vérifiant l'une des conditions (o, n) pour $n \geq 2$ avec unicité est réunion de demi-groupes simples à gauche d'après la propriété 1 et le théorème 3. Soit S l'un quelconque de ces demi-groupes simples à gauche; pour tout $x \in S$, il existe $u \in S$ satisfaisant à $x = ux^n$ (puisque S est simple à gauche) et cet élément u est unique d'après la condition d'unicité; il en résulte que S est un groupe à gauche ⁽¹⁵⁾, donc que D est réunion de groupes.

Par suite, D est réunion de demi-groupes complètement simples qui sont ses classes modulo l'équivalence \mathcal{R} définie au lemme 3 ⁽¹⁶⁾. D'après la condition d'unicité, chacun de ces demi-groupes complètement simples est un groupe à gauche (sinon, il contiendrait un groupe à droite qui ne serait pas un groupe et qui mettrait la condition d'unicité en défaut). Supposons que l'équivalence \mathcal{R} ne soit pas l'équivalence absolue. D'après la propriété 9, nous pourrions trouver deux classes modulo \mathcal{R} distinctes, soient S_α et S_β , telles que l'on ait $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. La réunion de S_α et S_β serait un demi-groupe dont la structure est connue grâce à un théorème de A. H. Clifford ⁽¹⁷⁾. En utilisant les notations de ce théorème, S_β étant un groupe à gauche, l'application Φ devrait être un homomorphisme de S_α dans S_β . En désignant par E un élément idempotent de S_α , $E\Phi$ serait nécessairement l'élément unité du groupe G ; d'autre part, l'application $i \rightarrow Ei$ de l'ensemble J dans lui-même étant idempotente, il existerait $i_0 \in J$ tel que l'on ait $Ei_0 = i_0$; on pourrait alors écrire, en négligeant le second indice des éléments de S_β puisque K se réduit ici à un seul élément :

$$E(e; i_0)^n = E(e; i_0) = (E\Phi.e; Ei_0) = (e; i_0),$$

ce qui contredirait la condition d'unicité puisqu'on a évidemment déjà

$$(e; i_0)(e; i_0)^n = (e; i_0).$$

Donc, l'équivalence \mathcal{R} est l'équivalence absolue, c'est-à-dire que D est simple et est un groupe à gauche.

⁽¹⁴⁾ On appelle groupe à gauche un demi-groupe qui vérifie l'existence des quotients à gauche et la règle de simplification à droite. On sait que cette deuxième condition est équivalente, en présence de la première, à l'existence d'au moins un élément idempotent et qu'un tel demi-groupe est isomorphe au produit d'un groupe et d'un anti-semi-groupe à droite (demi-groupe dans lequel tout élément est permis à droite).

⁽¹⁵⁾ Un demi-groupe simple à gauche dans lequel il existe deux éléments a et b tels que $ub = vb = a$ entraîne $u = v$ est un groupe à gauche. Cf. R. CROISOT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 778, lemme 2.

⁽¹⁶⁾ Cf. A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, § 2.

⁽¹⁷⁾ *Loc. cit.*, théorème 4.

THÉOREME 7. — *Les seuls demi-groupes vérifiant l'une des conditions (m, n) pour m ≥ 1 et n ≥ 1 avec unicité sont les groupes.*

Pour m = n = 1, ceci a fait l'objet du théorème 5. Nous pouvons donc supposer qu'on a m + n > 2. Un demi-groupe D satisfaisant à l'hypothèse est alors nécessairement une réunion de groupes d'après le théorème 1, le théorème 2 ou le théorème symétrique du théorème 2. La condition d'unicité entraîne que les demi-groupes complètement simples qui constituent les classes modulo \mathcal{R} sont des groupes, ce qui implique la permutabilité des idempotents de D ⁽¹⁸⁾. Si e et f sont deux idempotents de D, nous pouvons donc écrire

$$(ef)^m e (ef)^n = (ef)^m f (ef)^n = ef,$$

d'où e = f d'après la condition d'unicité. Le demi-groupe D contenant un seul idempotent, \mathcal{R} est l'équivalence absolue et D est un groupe.

Remarquons maintenant que, dans un groupe, l'élément u satisfaisant à une condition (m, n) avec m + n = 2 est l'élément inverse de l'élément x; par suite, la correspondance entre x et u est alors réciproque. Il semble donc naturel d'étudier les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) avec m + n = 2 auxquels on impose, de plus, cette réciprocity. Nous appellerons ces demi-groupes demi-groupes inversifs (ou inversifs à gauche, ou inversifs à droite) avec réciprocity.

LEMME 4. — *Un demi-groupe complètement simple est inversif avec réciprocity, inversif à gauche avec réciprocity, inversif à droite avec réciprocity.*

On sait ⁽¹⁹⁾ qu'un tel demi-groupe D peut être représenté de la façon suivante : G étant un groupe, J et K deux ensembles d'indices, et (j, k) → p_{kj} une application de J × K dans G, les éléments de D sont les triples (a; j, k) avec a ∈ G, j ∈ J, k ∈ K, la loi de composition étant donnée par

$$(a; j, k) (a'; j', k') = (ap_{kj} a'; j, k').$$

Soit alors x = (a; j, k) un élément quelconque de D; cherchons comment doit être choisi u = (a'; j', k') pour qu'on ait xux = x; on doit avoir pour cela :

$$(ap_{kj} a' p_{kj} a; j, k) = (a; j, k);$$

on peut donc choisir arbitrairement j' et k', puis déterminer a' par l'éga-

⁽¹⁸⁾ En effet, soient A et B deux classes modulo \mathcal{R} ; soient e et f leur élément unité respectif; il existe une classe modulo \mathcal{R} , soit C, telle que l'on ait AB ⊆ C et BA ⊆ C; g étant l'élément unité de C, on peut écrire (ef)g = e(fg) = eg = g, d'où ef = g, et de même fe = g. On obtient ainsi une propriété caractéristique des demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les idempotents sont permutables : leurs sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes.

⁽¹⁹⁾ Cf. D. REES, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 36, 1940, p. 387-400.

lité $(ap_{kj})(a'p_{kj}) = e$, élément unité de G . Mais cette égalité peut aussi se mettre sous la forme $(a'p_{kj})(ap_{kj}) = e$, ce qui établit la réciprocity entre x et u . Donc, D est inversif avec réciprocity.

En utilisant les mêmes notations, cherchons maintenant comment on doit choisir u pour qu'on ait $x = ux^2$; on doit alors vérifier l'égalité

$$(a'p_{kj}ap_{kj}a; j', k) = (a; j, k);$$

donc, j' doit être égal à j , k' est arbitraire et a' doit satisfaire à $(a'p_{kj})(ap_{kj}) = e$. Ceci s'écrit encore $(ap_{kj})(a'p_{kj}) = e$, d'où la réciprocity entre x et u . Donc, D est inversif à gauche avec réciprocity et, par symétrie, inversif à droite avec réciprocity.

LEMME 5. — Soit D un demi-groupe vérifiant la condition

$$xyx = x \Rightarrow yxy = y;$$

soit \mathcal{R} la relation d'équivalence définie dans D par

$$a \equiv b(\mathcal{R}) \Leftrightarrow DaD = DbD;$$

si un produit d'éléments de D est égal à un idempotent, tous les éléments de ce produit sont équivalents à cet idempotent modulo \mathcal{R} .

Considérons d'abord le cas d'un produit de deux éléments : $uv = e$, idempotent de D ; on a $e = euv \in DuD$; d'autre part, on peut écrire

$$(ve)u(ve) = ve(uv)e = veee = ve,$$

d'où résulte, d'après l'hypothèse, $u = u(ve)u = (uv)eu$, ce qui entraîne $u \in DeD$; on a donc $u \equiv e(\mathcal{R})$; par symétrie, on a également $v \equiv e(\mathcal{R})$.

Considérons maintenant le cas d'un produit de trois éléments : $uvw = e$, idempotent de D ; cette égalité peut s'écrire $u(vw) = e$ ou $(uv)w = e$, d'où résulte, d'après ce qu'on vient d'établir $u \equiv w \equiv e(\mathcal{R})$; d'autre part, on a

$$(weuv)(weuv) = we(uvw)e(uv) = w(eee)uv = weuv,$$

ce qui montre que cet élément est un idempotent, soit f ; on peut alors écrire $(weu)v = f$ et $w(euv) = f$, d'où l'on déduit $v \equiv w \equiv f(\mathcal{R})$, et, par suite, $u \equiv v \equiv w \equiv e(\mathcal{R})$.

Le cas d'un nombre quelconque d'éléments en résulte immédiatement.

THÉORÈME 8. — Les demi-groupes inversifs avec réciprocity sont les demi-groupes complètement simples.

D'après le lemme 4, il suffit de montrer qu'un demi-groupe inversif avec réciprocity est un demi-groupe complètement simple.

Montrons d'abord qu'un tel demi-groupe D est simple; D étant inversif, on a $D^3 = D$ et il suffit d'établir que l'équivalence \mathcal{R} définie dans le lemme 5 est

l'équivalence absolue. Soient x et y deux éléments quelconques de D ; on peut trouver $z \in D$ tel que l'élément $(xy)z$ soit idempotent ⁽²⁰⁾; il en résulte, d'après le lemme 5, que les éléments x et y sont équivalents modulo \mathcal{R} , c'est-à-dire que l'équivalence \mathcal{R} est bien l'équivalence absolue.

Soit e un idempotent de D ; nous montrons qu'il est primitif. En effet, si f est un idempotent de D vérifiant les égalités $ef = fe = f$, on a $fef = f$, d'où $efe = e$, d'après la condition de réciprocity, ce qui entraîne $e = f$. Le demi-groupe simple D est donc complètement simple.

THÉOREME 9. — *Les demi-groupes inversifs à gauche avec réciprocity sont les demi-groupes complètement simples.*

En vertu du lemme 4, il reste à établir qu'un demi-groupe D inversif à gauche avec réciprocity est complètement simple.

A tout élément $x \in D$, on peut faire correspondre $u \in D$ tel que l'on ait $x = ux^2$; on en déduit $u = xu^2$ d'après la condition de réciprocity, d'où résulte $x = xu^2x^2$, ce qui entraîne que D est inversif. D est donc réunion de groupes d'après le théorème 2.

Il suffit de montrer que D est simple. S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions trouver deux sous-demi-groupes simples maximaux de D , soient S_α et S_β , tels que l'on ait $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. Considérons, dans cette hypothèse, un idempotent de S_α , soit E ; en utilisant à nouveau les notations de A. H. Clifford ⁽¹⁷⁾, l'application $i \rightarrow Ei$ de l'ensemble J dans lui-même étant idempotente, il existe $j \in J$ tel que l'on ait $Ej = j$; prenons un élément x de S_β de la forme $(a; j, k)$, a étant un élément de G et k un élément de K fixé arbitrairement; le produit Ex^2 peut s'écrire

$$Ex^2 = E(ap_{kj}a; j, k) = (E\Phi \cdot p_{1E, j}ap_{kj}a; j, k);$$

si l'on choisit alors a de façon à satisfaire à l'égalité $E\Phi \cdot p_{1E, j}ap_{kj} = e$, élément unité de G , on a $Ex^2 = x$, ce qui contredit la condition de réciprocity, car l'élément xEx^2 appartient à S_β et il ne peut être égal à E .

La fin de ce travail se justifie par la remarque suivante : dans un demi-treillis, l'élément u satisfaisant à une condition (m, n) appartient à l'idéal principal engendré par l'élément x ; par suite, la correspondance entre x et u est alors anti-réciproque (u correspond à x et x correspond à u entraînent $x = u$). C'est pourquoi nous allons étudier les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) auxquels on impose, de plus, cette anti-réciprocity. Nous dirons qu'ils vérifient la condition (m, n) considérée avec anti-réciprocity.

⁽²⁰⁾ En réalité, nous utilisons seulement le fait que D est un demi-groupe inversé (Cf. G. THIERRIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1336). Par conséquent, les demi-groupes inversés vérifiant la condition du lemme 5 sont les demi-groupes complètement simples.

THÉOREME 10. — *Les demi-groupes inversifs avec anti-réciprocité sont les demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes involutifs* ⁽²¹⁾.

Soit D un demi-groupe inversif avec anti-réciprocité. Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = xux$; cette égalité entraîne

$$x = xu(xux) = x(uxu)x \quad \text{et} \quad uxu = ux(uxu)xu = (uxu)x(uxu),$$

d'où $x = uxu$, d'après la condition d'anti-réciprocité; on en tire

$$x^2 = (uxu)x = u(xux) = ux \quad \text{et} \quad x^2 = x(uxu) = (xux)u = xu, \quad \text{d'où} \quad ux = xu.$$

Par suite, l'égalité $x = xux$ peut s'écrire $x = ux^2$, ce qui montre que D est inversif à gauche et par conséquent réunion de groupes en vertu du théorème 2. La condition d'anti-réciprocité entraîne alors que les demi-groupes complètement simples qui constituent ses sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes et que ces groupes sont involutifs.

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes dans lequel les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes involutifs. D est évidemment inversif. Supposons que x et u soient deux éléments de D vérifiant les égalités $x = xux$ et $u = uxu$. Si l'on désigne par X et U respectivement les sous-demi-groupes simples maximaux qui contiennent x et u , on a, dans le demi-treillis D/\mathcal{R} défini dans la propriété 9,

$$X = XUX = XU \quad \text{et} \quad U = UXU = XU, \quad \text{d'où} \quad X = U,$$

c'est-à-dire que x et u appartiennent au même sous-demi-groupe simple maximal. Celui-ci étant un groupe involutif, on a $x = u$, d'où la condition d'anti-réciprocité.

THÉOREME 11. — *Les demi-groupes vérifiant l'une des conditions (m, n) pour $m \geq 1, n \geq 1, m + n \geq 3$ avec anti-réciprocité sont les demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes satisfaisant, pour $k = m + n$, à la propriété*

(P_k) *Si l'ordre d'un élément divise $k(k-2)$, cet ordre divise k* ⁽²²⁾.

Soit D un demi-groupe vérifiant une condition (m, n) pour $m \geq 1, n \geq 1, m + n \geq 3$ avec anti-réciprocité. Il est réunion de groupes. La condition d'anti-réciprocité entraîne que les demi-groupes complètement simples qui constituent ses sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes. Si x est un élément quelconque d'un tel groupe, soit G , il existe dans G un élément et un seul u satisfaisant à l'égalité $x = x^m u x^n$; c'est l'élément $u = x^{1-m-n}$.

⁽²¹⁾ La structure de ces demi-groupes est connue d'après l'étude de A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, § 3, en vertu de la remarque de la note ⁽¹⁸⁾. Ils sont nécessairement commutatifs.

⁽²²⁾ Il est remarquable que ceci n'impose aucune condition si $k = 3$.

Supposons alors que G possède un élément g dont l'ordre divise $k(k-2)$ pour $k = m + n$; en prenant $x = g$, nous avons $\bar{u} = g^{1-k}$ et en prenant $x = g^{1-k}$, nous avons $u = g^{(1-k)^2} = g^{k(k-2)}g = g$; on en déduit, d'après la condition d'anti-réciprocité, $g = g^{1-k}$, c'est-à-dire que l'ordre de g divise k .

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes dans lequel les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes satisfaisant à la propriété (P_k) . On voit d'abord, comme dans la réciproque du théorème 10 que les égalités $x = x^m u x^n$ et $u = u^m x u^n$ peuvent être compatibles seulement si x et u appartiennent au même sous-demi-groupe simple maximal; s'il en est ainsi, nous pouvons écrire $u = x^{1-m-n}$ et $x = u^{1-m-n}$, d'où résulte, puisqu'on a $m + n = k$, la propriété (P_k) étant vérifiée,

$$x = x^{(1-k)^2} = x^{k(k-2)}x = x^{-k}x = x^{1-k} = u.$$

La condition d'anti-réciprocité est donc réalisée.

Remarque. — Les demi-groupes vérifiant l'une des conditions (o, n) pour $n \geq 2$ avec anti-réciprocité peuvent avoir une structure très compliquée car il en est ainsi en particulier des demi-groupes réunions de demi-groupes simples dans lesquels chaque sous-demi-groupe simple maximal est un demi-groupe simple à gauche sans idempotent ou un groupe à gauche dont les sous-groupes maximaux sont involutifs si $n = 2$ ou satisfont à la propriété (P_n) si $n > 2$.