R. FORTET
E. MOURIER

Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 3 (1953), p. 267-285
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_3_267_0>

CONVERGENCE
DE LA RÉPARTITION EMPIRIQUE VERS LA RÉPARTITION THÉORIQUE

Par M. R. FORTET et M^{lle} E. MOURIER.

1. *Position du problème.* — Soit $\mathfrak{X}$ un espace quelconque de points x; $\mathcal{B}$ un corps borélien de sous-ensembles e de $\mathfrak{X}$, contenant $\mathfrak{X}$ lui-même; $P(e)$ une mesure sur $\mathcal{B}$, c'est-à-dire une fonction d'ensemble, définie et complètement additive sur $\mathcal{B}$, positive ou nulle, avec $P(\mathfrak{X}) = 1$. Nous considérons une suite indéfinie d'éléments aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{X}$, admettant tous $P(e)$ comme loi de probabilité (*cf.* A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [1], p. 71) (¹).

Soit $\varphi(e; x)$ la caractéristique de l'ensemble e [$\varphi(e; x) = 1$ si $x \in e$; $\varphi(e; x) = 0$ si $x \notin e$]; posons

$$P_n(e) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(e; X_j); \tag{1.1}$$

$P_n(e)$ est une mesure aléatoire; lorsque la suite $\{X_j\}$ est d'un type convenable, par exemple : suite d'éléments indépendants, en chaîne strictement stationnaire, etc., l'étude de la convergence stochastique de $P_n(e)$ vers $P(e)$ pour $n \to +\infty$ peut être considérée comme un des problèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités; dans le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite réelle ce problème est, au moins partiellement, résolu par le classique théorème de Glivenko-Cantelli (*cf.* § 6); le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique de $P_n(e)$ sous des hypothèses beaucoup plus générales.

(¹) Les numéros entre crochets, comme [1], renvoient à la bibliographie, p. 285.

Méthode. — Cette étude repose sur les idées suivantes : pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\varphi(e; x)$ est, en e, une mesure définie sur $\mathcal{B}$; toute combinaison linéaire d'un nombre fini de $\varphi(e; x)$ de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi(e; x_j),$$

où $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ sont n points distincts ou non de $\mathfrak{X}$ et $a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ n nombres quelconques, est, en e, une fonction d'ensemble bornée, définie et complètement additive sur $\mathcal{B}$: soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces fonctions d'ensemble; $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, réel ou complexe suivant que les a_j sont pris réels ou complexes; soit $\mathcal{E}'$ un espace vectoriel arbitraire, tel toutefois que $\mathcal{E}$ soit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}'$.

Les $\varphi(e; X_j)$ sont alors des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}'$, et d'ailleurs de même loi de probabilité, mutuellement indépendants si les X_j le sont entre eux, en chaîne strictement stationnaire si les X_j sont en chaîne strictement stationnaire, etc. (1.1) fait apparaître $P_n(e)$ comme la moyenne arithmétique des $\varphi(e; X_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$; l'étude du comportement asymptotique de $P_n(e)$ est donc une étude de lois des grands nombres pour des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{E}'$.

Or les seules lois des grands nombres concernant un espace vectoriel $\mathcal{E}'$, à la fois générales et précises actuellement connues, qui ont été données par E. Mourier [1], supposent que $\mathcal{E}'$ est un *espace de Banach séparable.* Il sera donc pour nous nécessaire, mais aussi suffisant, de construire une extension $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ qui soit un espace de Banach séparable, pour, par simple application des résultats de E. Mourier [1], résoudre le problème posé.

Remarques. — *a.* Il est clair que dans la définition de $\mathcal{E}$, et par suite de $\mathcal{E}'$, on peut faire abstraction des $\varphi(e; x)$ dont le x appartient à un ensemble ω donné, arbitraire, tel que $P(\omega) = 0$.

b. Si $\lambda(e)$ est une fonction d'ensemble définie et complètement additive sur $\mathcal{B}$, d'ailleurs quelconque, on peut évidemment construire $\mathcal{E}$, et par suite $\mathcal{E}'$, à partir des fonctions d'ensemble $\varphi(e; x) - \lambda(e)$, au lieu des $\varphi(e; x)$; naturellement les résultats concerneront $P_n(e) - \lambda(e)$ au lieu de $P_n(e)$ elle-même.

Résultats. — La construction d'un $\mathcal{E}'$ qui soit un espace de Banach séparable peut être obtenue dans de nombreux cas, et de diverses façons selon les hypothèses faites sur $\mathfrak{X}$ et sur $P(e)$, et selon l'application envisagée.

Dans tout ce qui suit nous supposerons que :

α. $\mathfrak{X}$ est distancié et séparable;

β. Les sphères de $\mathfrak{X}$ font partie de $\mathcal{B}$.

(x', x'') désignera la distance de deux points quelconques x' et x'' de $\mathfrak{X}$.

Notons qu'un moyen d'assurer que $\mathcal{E}'$ est un espace de Banach est de le construire comme dual (fort) d'un espace de Banach de fonctions numériques de point définies sur $\mathfrak{X}$: ce procédé sera suivi dans la section I; dans la section II nous donnerons un exemple de construction directe de $\mathcal{E}'$.

SECTION I.

2. Définition et étude de l'espace $\mathcal{F}$. — Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions numériques réelles $f(x)$ définies sur $\mathfrak{X}$ et telles que :

$$\underset{x', x'' \in \mathfrak{X}}{\text{b. s.}} \frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')} < +\infty.$$

On posera

$$\mathrm{M}[f] = \underset{x', x'' \in \mathfrak{X}}{\text{b. s.}} \frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')}, \tag{2.1}$$

$\mathcal{F}$ est évidemment un espace vectoriel réel; en prenant comme norme $\|f\|$ de $f \in \mathcal{F}$ le nombre $\mathrm{M}[f]$ défini par (2.1), $\mathcal{F}$ est un espace de Banach.

En effet :

1° $\mathrm{M}[f]$ est une norme, car :

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha. & \mathrm{M}[f] \geqq 0; & \\ \beta. & \mathrm{M}[f_1 + f_2] \leqq \mathrm{M}[f_1] + \mathrm{M}[f_2], & (f_1 \text{ et } f_2 \in \mathcal{F}); \\ \gamma. & \mathrm{M}[\lambda f] = |\lambda|\, \mathrm{M}[f], \quad (f \in \mathcal{F}), & \lambda \text{ scalaire quelconque.} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Mais observons que $\mathrm{M}[f] = 0$ signifie non que f est identiquement nulle, mais seulement que f est constante; nous devrons donc considérer deux fonctions différant d'une constante comme identiques en tant qu'éléments de $\mathcal{F}$; toute fonction constante est l'élément nul θ de $\mathcal{F}$.

2° On vérifie aisément que $\mathcal{F}$ est complet; soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, telle que $\mathrm{M}[f_{n+m} - f_n] \to 0$ si $n \to \infty$, uniformément en m; nous pouvons, x_0 désignant un point fixe arbitraire de $\mathfrak{X}$, supposer $f_n(x_0) = 0$ pour tout n; on a

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+m}(x) - f_n(x)] - [f_{n+m}(x_0) - f_n(x_0)]| \leqq \mathrm{M}[f_{n+m} - f_n]\,(x_0, x).$$

$|f_{n+m}(x) - f_n(x)|$ tend donc vers zéro, uniformément en m; donc $f_n(x)$ tend vers une limite, soit $l(x)$; montrons que $l \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire que :

$$\underset{x', x'' \in \mathfrak{X}}{\text{b. s.}} \frac{|l(x') - l(x'')|}{(x', x'')} < +\infty;$$

On a :

$$\frac{|l(x') - l(x'')|}{(x', x'')} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|f_n(x') - f_n(x'')|}{(x', x''')};$$

$$\frac{|f_n(x') - f_n(x'')|}{(x', x'')} \leqq \mathrm{M}[f_n].$$

Or $M[f_n]$ est bornée; on le voit en remarquant que si l'on prend n_0 assez grand pour que $M[f_n - f_{n_0}]$ soit inférieure à un nombre arbitraire A pour tout $n > n_0$, on a d'après (2.2) :

$$M[f_n] \leqq M[f_n - f_{n_0}] + M[f_{n_0}] \leqq A + M[f_{n_0}].$$

On remarque que la fonction $f(x) = (x_0, x)$, où x_0 est un point fixe arbitraire de $\mathfrak{X}$, appartient à $\mathcal{F}$ avec $\|(x_0, x)\| = 1$.

Une construction de $\mathcal{E}'$ à partir de $\mathcal{F}$. — Soit $\mathcal{F}^\star$ l'espace de Banach défini comme étant le dual de $\mathcal{F}$. Remarquons que toute fonction d'ensemble $\psi(e)$ du type :

$$\psi(e) = \varphi(e; x') - \varphi(e; x''), \tag{2.3}$$

où x' et x'' sont deux points quelconques de $\mathfrak{X}$, constitue une fonctionnelle linéaire continue $f^\star$ sur $\mathcal{F}$ par la formule [2] :

$$\langle f^\star, f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\psi(e) = f(x') - f(x''), \tag{2.4}$$

on voit que

$$\|f^\star\| = \underset{f \in \mathcal{F}}{\text{b. s.}} \frac{|\langle f^\star, f \rangle|}{M[f]} \leqq \frac{M[f]\,(x', x'')}{M[f]} = (x', x''):$$

d'ailleurs on a plus précisément :

$$\|f^\star\| = (x', x'') \tag{2.5}$$

comme on le vérifie en considérant la fonction $f(x) = (x, x'')$.

Soit $\{y_n\}$ une suite dénombrable de points de $\mathfrak{X}$, dense dans $\mathfrak{X}$: une telle suite existe puisque $\mathfrak{X}$ est séparable. Soit $\mathcal{F}_1^\star$ l'ensemble des fonctions d'ensemble du type :

$$\psi(e) = \varphi(e; y_j) - \varphi(e; y_k),$$

où y_j et y_k sont deux points quelconques de la suite $\{y_n\}$. $\mathcal{F}_1^\star$ est dénombrable et $\mathcal{F}_1^\star \subset \mathcal{F}^\star$.

Soit maintenant $\mathcal{E}'$, le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{F}^\star$ qui contient $\mathcal{F}_1^\star$: $\mathcal{E}'$ est un sous-espace de Banach *séparable* puisque $\mathcal{F}_1^\star$ est dénombrable.

Soit $P(e)$ une loi de probabilité sur $[\mathfrak{X}; \mathcal{B}]$, telle que :

$$\int_{\mathfrak{X}} (x_0, x)\, dP(e) < +\infty, \tag{2.6}$$

où x_0 est un point fixe quelconque de $\mathfrak{X}$; la propriété (2.6), évidemment indé-

---

(2) Étant donné un élément a d'un espace de Banach $\mathcal{A}$ et un élément $a^\star$ du dual $\mathcal{A}^\star$ de $\mathcal{A}$, nous désignons par $< a^\star, a >$ le nombre obtenu en appliquant à a la fonctionnelle linéaire $a^\star$.

pendante de x_0, entraîne d'après (2.1) que toute fonction $f(x) \in \mathcal{F}$ est absolument sommable-P. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions d'ensemble du type :

$$\varphi_0(e;z) = \varphi(e;z) - P(e), \tag{2.7}$$

où z est un point fixe quelconque de $\mathfrak{X}$ (*cf.* § 1, Remarque *b*).

Nous allons montrer que :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'. \tag{2.8}$$

1° Soit $\{z_h\}$ $(h=1, 2, \ldots)$ une suite dénombrable arbitraire de points z_h, de $\mathfrak{X}$ appartenant à la suite $\{y_n\}$; à z_h attribuons une masse $m_h \geqq 0$, avec :

$$\sum_h m_h = 1, \qquad \sum_{h'} (x_0, z_h)\, m_h < +\infty \tag{2.9}$$

et soit $\mu(e)$ la mesure correspondant à cette répartition de masses; la fonction d'ensemble

$$\gamma(e) = \varphi(e;z) - \mu(e),$$

en tant que définissant une fonctionnelle linéaire f^* sur $\mathcal{F}$ par la formule :

$$\langle f'', f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\gamma(e)$$

est un élément de $\mathcal{E}'$; d'abord f^* est une fonctionnelle linéaire continue d'après (2.9), on voit même que :

$$\|f^*\| \leqq (x_0, z) + \sum_h (x_0, z_h)\, m_h, \tag{2.10}$$

quel que soit $x_0 \in \mathfrak{X}$.

Supposons pour commencer que z est un point de la suite $\{y_n\}$; posons :

$$\psi_h(e) = m_h[\varphi(e;z) - \varphi(e;z_h)],$$

$\psi_h(e)$ est un élément de $\mathcal{E}'$; donc :

$$\Psi_n(e) = \sum_{h=1}^{n} \psi_h(e)$$

aussi; or $\gamma(e)$ est limite forte dans $\mathcal{F}^*$ de $\Psi_n(e)$ lorsque $n \to +\infty$; en effet $\gamma(e) - \Psi_n(e)$ est une mesure du même type que $\gamma(e)$, la fonctionnelle linéaire f_n^* qu'elle définit satisfait d'après (2.10) à :

$$\|f_n^*\| \leqq \left(1 - \sum_{h=1}^{n} m_h\right)(x_0, z) + \sum_{h>n} (x_0, z_h)\, m_h,$$

visiblement $\|f_n^*\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $\gamma(e)$ est bien un élément de $\mathcal{E}'$.

Étendons ce résultat au cas où z est un point quelconque; soit k tel que :

$$(z, y_k) < \varepsilon.$$

On peut écrire :

$$\gamma(e) = [\varphi(e; y_k) - \mu(e)] + [\varphi(e; z) - \varphi(e; y_k)];$$

$[\varphi(e; y_k) - \mu(e)]$ est un élément de $\mathcal{E}'$ d'après ce qui précède; $[\varphi(e; z) - \varphi(e; y_k)]$ est un élément de $\mathcal{F}^\star$, dont la norme est inférieure à ε d'après (2.5); comme ε peut être pris arbitraire, $\gamma(e)$ est bien un élément de $\mathcal{E}'$.

2° En choisissant convenablement la suite $\{z_h\}$ et les masses m_h, la fonctionnelle linéaire définie par $\varphi_0(e; z) - \gamma(e)$ a une norme arbitrairement petite.

Soit $\Sigma_h(\rho)$ la sphère (ouverte pour fixer les idées) de centre y_h et de rayon $\rho > 0$; $\mathfrak{X}$ est la réunion des $\Sigma_h(\rho)$, quel que soit ρ d'ailleurs; posons :

$$\begin{aligned} &S_1(\rho) = \Sigma_1(\rho), \\ &S_2(\rho) = \Sigma_2(\rho) \cap S_1(\rho), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &S_{h+1}(\rho) = \Sigma_{h+1}(\rho) - \Sigma_{h+1}(\rho) \cap \bigcup_{j=1}^{h} S_j(\rho). \end{aligned}$$

Les ensembles $S_h(\rho)$ sont disjoints et leur somme est $\mathfrak{X}$, ils sont mesurables-$\mathcal{B}$.

Prenons $z_h = y_h$, $m_h = P[S_h(e)]$; $\mu(e)$ et $\gamma(e)$ ayant les valeurs correspondantes, on a :

$$\varphi_0(e; z) - \gamma(e) = \mu(e) - P(e)$$

qui définit une fonctionnelle linéaire $f^\star$ par la formule :

$$\begin{aligned} \langle f^\star, f \rangle &= \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d[\mu(e) - P(e)] = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mu(e) - \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, dP(e) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mu(e) - \sum_h \int_{S_h(\rho)} f(x)\, dP(e). \end{aligned}$$

Sur $S_h(\rho)$, on a

$$f(x) = f(z_h) + u_h(x),$$

avec

$$|u_h(x)| \leqq M[f](z_h, x) \leqq M[f]\rho.$$

D'où

$$\langle f^\star, f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mu(e) - \sum_h f(z_h)\, m_h - \sum_h \int_{S_h(\rho)} u_h(x)\, dP(e).$$

Or

$$\sum_h f(z_h)\, m_h = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mu(e),$$

$$\left| \sum_h \int_{S_h(\rho)} u_h(x)\, dP(e) \right| \leqq M[f]\rho.$$

Donc

$$\| f^\star \| \leqq \rho$$

et comme ρ est arbitraire, le résultat annoncé est établi.

On en conclut que $\varphi_0(e; z)$ est un élément de $\mathcal{E}'$, c'est-à-dire que (2.8) est exact.

Remarquons que la norme de $\varphi_0(e; z)$ comme élément de $\mathcal{E}'$ (ou de $\mathcal{F}^\star$) est au plus égale à :

$$\int_{\mathfrak{X}} (z, x)\, dP(e). \tag{2.11}$$

3. Convergence stochastique de $P_n(e)$. — Soit $\{X_j\}$ une suite d'éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{X}$, mutuellement indépendants, et obéissant tous à la même loi de probabilité $P(e)$ ci-dessus, satistaisant donc à (2.6), quelconque par ailleurs; $P_n(e)$ étant définie par (1.1),

$$P_n(e) - P(e) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\varphi(e; X_j) - P(e)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_0(e; X_j);$$

$\varphi_0(e; X_j)$ est un élément aléatoire, que nous désignerons par Φ_j, prenant ses valeurs dans l'espace de Banach séparable $\mathcal{E}'$ construit au paragraphe 2; les Φ_j sont mutuellement indépendants et de même loi de probabilité; la moyenne arithmétique $P_n(e) - P(e)$ des Φ_j est aussi un élément de $\mathcal{E}'$; nous désignerons par

$$\|\varphi_0(e; x)\|, \quad \|\varphi_0(e; X_j)\|, \quad \|P_n(e) - P(e)\|, \quad \ldots$$

les normes de $\varphi_0(e; x)$, $\varphi_0(e; X_j)$, $P_n(e) - P(e)$, ... comme éléments de $\mathcal{E}'$. En vertu d'un théorème de E. Mourier (*cf.* E. Mourier [1]), on a :

Théorème 1. — *Presque-sûrement* $\|P_n(e) - P(e)\|$ *tend vers zéro lorsque* $n \to \infty$.

Le théorème de E. Mourier suppose toutefois que :

a. $\varphi^\star$ désignant une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathcal{E}'$ si on l'applique à $\varphi_0(e; x)$ considéré comme élément de $\mathcal{E}'$, le nombre obtenu $\langle \varphi^\star, \varphi_0(e; x)\rangle$ est une fonction du point x de $\mathfrak{X}$: il faut que cette fonction de point soit mesurable-P.

b. Parce que $\mathcal{E}'$ est séparable, si a est satisfaite, $\|\varphi_0(e; x)\|$ est une fonction mesurable-P de x sur $\mathfrak{X}$, il faut que :

$$E[\|\varphi_0(e; X_j)\|] < +\infty.$$

c. Si a et b sont satisfaites, $\varphi_0(e; X_j)$ a une espérance mathématique $\overline{\varphi}_0 = E[\varphi_0(e; X_j)]$; il faut que cette espérance mathématique soit l'élément nul 0 de $\mathcal{E}'$.

Nous allons montrer que sous les hypothèses déjà faites, les conditions a, b et c sont satisfaites :

a. $\langle \varphi^\star, \varphi_0(e; x)\rangle$ est une fonction continue de x; on a en effet :

$$\begin{aligned}|\langle \varphi^\star, \varphi_0(e; x')\rangle - \langle \varphi^\star, \varphi_0(e; x'')\rangle| &= |\langle \varphi^\star, \varphi_0(e; x') - \varphi_0(e; x'')\rangle| \\ &= |\langle \varphi^\star, \varphi(e; x') - \varphi(e; x'')\rangle| \\ &\leqq \|\varphi^\star\|.\|\varphi(e; x') - \varphi(e; x'')\| \\ &\leqq \|\varphi^\star\|.(x', x'').\end{aligned}$$

Or toute fonction du point x continue sur $\mathfrak{X}$ est mesurable — P puisque $\mathcal{B}$ contient les sphères.

b. Quant à $\mathrm{E}[\|\varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\|]$, sa valeur est :

$$\mathrm{E}[\|\varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\|] = \int_{\mathfrak{X}} \|\varphi_0(e; x)\|\, d\mathrm{P}(\omega) \quad (^3)$$

qui est finie d'après (2.11).

c. Par définition de l'espérance mathématique, pour toute fonctionnelle $\varphi^\star$ on a :

$$\mathrm{E}[\langle \varphi^\star, \varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\rangle] = \langle \varphi^\star, \bar{\varphi}_0\rangle. \tag{3.1}$$

Tout élément de $\mathcal{E}'$ est une fonctionnelle linéaire continue $f^\star$ sur $\mathcal{F}$; la forme $\langle f^\star, f\rangle$, pour $f^\star$ variable dans $\mathcal{E}'$ et f fixe arbitraire dans $\mathcal{F}$, constitue une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{E}'$; appliquons (3.1) en prenant pour $\varphi^\star$ cette fonctionnelle définie par f; on trouve :

$$\begin{aligned}\langle \varphi^\star, \bar{\varphi}_0\rangle &= \mathrm{E}\left[\int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[f(\mathrm{X}_j) - \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathrm{P}(e)\right] \\ &= \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathrm{P}(e) - \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathrm{P}(e) = 0.\end{aligned}$$

De sorte que $\bar{\varphi}_0$ qui, en tant qu'élément de $\mathcal{E}'$, est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{F}$ donne zéro quand on l'applique à un f quelconque de $\mathcal{F}$; c'est donc l'élément nul θ de $\mathcal{E}'$.

Remarque. — Le théorème de E. Mourier utilisé ci-dessus suppose seulement que les X_j forment une suite strictement stationnaire; on peut donc l'appliquer sous cette hypothèse plus générale, il en résulte alors que presque-sûrement $\mathrm{P}_n(e) - \mathrm{P}(e)$ tend fortement vers un élément L de $\mathcal{E}'$, qui n'est pas forcément l'élément nul, mais peut être aléatoire d'espérance mathématique nulle. Toutefois ici et dans la suite de ce Mémoire nous nous limiterons pour simplifier au cas des X_j mutuellement indépendants, le lecteur fera sans peine d'éventuelles extensions au cas strictement stationnaire.

---

(3) Pour éviter une confusion avec le e de $\varphi_0(e; x)$, on a, dans cette formule, appelé ω l'ensemble dont P est une fonction.

En outre, un autre théorème de R. Fortet et E. Mourier [1], permet d'affirmer que :

THÉORÈME 2. — $E[\| P_n(e) - P(e) \|]$ *tend vers zéro lorsque* $n \to +\infty$.

$P_n(e) - P(e)$ étant un élément de $\mathscr{E}'$, définit une fonctionnelle linéaire continue $f^\star$ sur $\mathscr{F}$ par la formule :

$$\langle f^\star, f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d[P_n(e) - P(e)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - E[f(X_j)] \tag{3.2}$$

et l'on a

$$|\langle f^\star, f \rangle| \leqq \| f^\star \| \, M[f] = \| P_n(e) - P(e) \| \, M[f],$$

il en résulte

THÉORÈME 3. — *Lorsque* $n \to +\infty$, *quel que soit le nombre positif fini* ρ, *presque-sûrement la moyenne arithmétique* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$ *tend vers*

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\, dP(e) = E[f(X_j)],$$

uniformément en f *pour* $f \in \mathscr{F}$ *avec* $M[f] \leqq \rho$.

En outre :

$$E\left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - E[f(X_j)] \right|$$

tend vers zéro avec la même uniformité en f.

4. APPLICATION. — Il est naturel d'appliquer les résultats précédents au cas où $\mathfrak{X}$ est la droite euclidienne réelle; la loi de probabilité $P(e)$ est alors déterminée par sa fonction de répartition $F(x)$, assujettie d'après (2.6) à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, dF(x) < +\infty. \tag{4.1}$$

$P_n(e)$ est également déterminée par sa fonction de répartition $F_n(x)$; le point essentiel est de trouver l'expression de la norme $\| P_n(e) - P(e) \|$ de $[P_n(e) - P(e)]$, comme élément de $\mathscr{F}^\star$, en fonction de $F(x)$ et $F_n(x)$. Plus généralement, soit $G(x)$ une fonction de répartition telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, dG(x) < +\infty \tag{4.2}$$

et quelconque par ailleurs; $G(x) - F(x)$ constitue un élément $f^\star$ de $\mathscr{F}^\star$ par la formule :

$$\langle f^\star, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d[G(x) - F(x)] \qquad (f \in \mathscr{F}); \tag{4.3}$$

évaluons $\| f^\star \|$ à partir de $F(x)$ et $G(x)$.

1° Prenons pour $f \in \mathcal{F}$ la fonction absolument continue dont la dérivée (par rapport à la mesure-L) $f'(x)$ vaut :

$$f'(x) = \varepsilon M \quad \text{si} \quad -\alpha \leqq x \leqq \beta \quad \begin{cases} (M > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0); \\ \varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad G(x) - F(x) \geqq 0], \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad G(x) - F(x) < 0]; \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < -\alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta$$

et supposons que $-\alpha$ et β sont des points de continuité pour $[G(x) - F(x)]$. On a :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a,b \to +\infty} \int_{-a}^{b} f(x)\, d[G(x) - F(x)]$$

$[-a$ et b points de continuité de $G(x) - F(x)]$; d'où :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a,b \to +\infty} \left\{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_{-a}^{b} - \int_{-a}^{b} [G(x) - F(x)] f'(x)\, dx \right\}$$
$$= -M \int_{-\alpha}^{\beta} |G(x) - F(x)|\, dx.$$

Il en résulte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx < +\infty \tag{4.4}$$

et que

$$\|f^*\| \geqq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx. \tag{4.5}$$

2° Si f est un élément quelconque de $\mathcal{F}$, $-a$ et b étant des points de continuité de $[G(x) - F(x)]$, on a :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a,b \to +\infty} \int_{-a}^{+b} f(x)\, d[G(x) - F(x)]$$
$$= \lim_{a,b \to +\infty} \{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_{-a}^{b} - \int_{-a}^{b} [G(x) - F(x)]\, df \}.$$

Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, df$ est absolument convergente, avec

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, df \right| \leqq M[f] \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, dx.$$

Donc la limite

$$\lim_{a,b \to +\infty} \{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_{-a}^{b} \} = \lim_{-a,b \to +\infty} \{ f(b)[G(b) - F(b)] - f(-a)[G(-a) - F(-a)] \}$$

existe, quelle que soit la façon dont $-a$ et b tendent vers $+\infty$; ceci d'ailleurs quelle que soit $f \in \mathcal{F}$; prenons alors :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqq 0, \\ x & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

On en déduit que la limite :

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x[G(x) - F(x)]|$$

existe ; donc elle vaut zéro, sans quoi (4.4) ne pourrait avoir lieu. Il en résulte que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on a :

$$\langle f^*, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d[G(x) - F(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, df(x),$$

donc :

$$\|f^*\| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx; \tag{4.6}$$

(4.5) et (4.6) prouvent que :

$$\|f^*\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx; \tag{4.7}$$

en d'autres termes, $\|f^*\|$ est l'aire arithmétique comprise entre le graphique de $F(x)$ et celui de $G(x)$; (4.7) résout le problème posé et nous en tirons en outre que :

Presque-sûrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)|\, dx = 0$$

et que

$$\lim_{n \to +\infty} E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)|\, dx\right] = 0.$$

Ainsi les théorèmes généraux du paragraphe 3 fournissent des théorèmes nouveaux même dans le cas si connu de la droite réelle.

5. Variante de la méthode précédente. — La construction de $\mathcal{E}'$ ne vaut que si $P(e)$ satisfait à la condition (2.6) ; une modification convenable permet d'éviter cette restriction.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}$ qui satisfont à la condition :

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{b. s.}} |f(x)| = N[f] < +\infty$$

En prenant comme norme dans $\mathcal{G}$ la quantité :

$$\|f\| = M[f] + N[f],$$

$\mathcal{G}$ est un espace de Banach; notons que deux fonctions de $\mathcal{G}$ qui diffèrent d'une constante ne sont pas identiques. Soit $\mathcal{G}^\star$ le dual de $\mathcal{G}$. Toute fonction d'ensemble $m(e)$ sur $\mathcal{B}$, complètement additive et bornée, constitue un élément $f^\star$ de $\mathcal{G}^\star$ par la formule :

$$\langle f^\star, f\rangle = \int f(x)\, dm(e)$$

et l'on voit que :

$$\|f^\star\| \leqq |m|(\mathfrak{X})$$

en désignant par $|m|(e)$ la variation totale ([4]) de $m(e)$. En particulier si $\mathrm{P}(e)$ est une loi de probabilité quelconque sur $\mathcal{B}$, $\mathrm{P}(e)$ est un élément de $\mathcal{G}^\star$; tout $\varphi(e;\, x)$ est un élément de $\mathcal{G}^\star$. Soit $\mathcal{E}'$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{G}^\star$ contenant tous les $\varphi(e;\, y_n)$; $\mathcal{E}'$ est séparable; on vérifie immédiatement que tout $\varphi(e;\, x)$ appartient à $\mathcal{E}'$, ainsi que toute mesure $m(e)$ du type :

$$m(e) = \sum_{k=1}^{n} m_k \varphi(e;\, z_k),$$

avec

$$m_k \geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k \leqq 1$$

les z_k appartenant à la suite $\{y_h\}$; il en est de même pour une mesure $m(e)$ du type :

$$m(e) = \sum_{k=1}^{+\infty} m_k \varphi(e;\, z_k),$$

avec la même condition pour les z_k et

$$m_k \geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} m_k \leqq 1,$$

car la différence :

$$\mu_n(e) = m(e) - \sum_{k=1}^{n} m_k \varphi(e;\, z_k)$$

a sa variation totale sur $\mathfrak{X}$ égale à :

$$|\mu_n|(\mathfrak{X}) = \sum_{k>n} m_k,$$

quantité infiniment petite si $n \to +\infty$.

([4]) *Cf.* A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [1], chap. XV.

$P(e)$ fait partie de $\mathcal{E}'$: reprenons les ensembles $S_h(\rho)$ de la page 272; soit $m(e)$ la mesure constituée en affectant les centres y_h des sphères $\Sigma_h(\rho)$ des masses $m_h = P[S_h(\rho)]$; le calcul de la page 272 montre, en désignant par $f^\star$ l'élément de $\mathcal{G}^\star$ constitué par $m(e) - P(e)$, que :

$$|\langle f^\star, f\rangle| \leqq M[f]\rho \qquad (f \in \mathcal{G}),$$

$P(e) \in \mathcal{E}'$ en résulte immédiatement.

Il s'ensuit que $\varphi(e\,;X_j)$ est un élément aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}'$ et satisfaisant (*mutatis mutandis* aux conditions a, b, c) de la page 273 :

a. Si $\varphi^\star$ est une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathcal{E}'$, $\langle \varphi^\star, \varphi(e\,;x)\rangle$ est une fonction de x mesurable — P ;

b. $E[\|\varphi(e\,;X_j)\|] < +\infty$;

c. $\varphi(e\,;X_j)$ a une espérance mathématique qui n'est autre que $P(e)$.

Les mêmes théorèmes de E. Mourier permettent d'énoncer :

THÉORÈME 4. — $\|P_n(e) - P(e)\|$ *désignant la norme de* $[P_n(e) - P(e)]$ *comme élément* de $\mathcal{G}^\star$, *lorsque* $n \to +\infty$:

1° *presque-sûrement,* $\|P_n(e) - P(e)\|$ *tend vers zéro ;*

2° $E[\|P_n(e) - P(e)\|]$ *tend vers zéro ;*

3° *quel que soit le nombre positif* ρ, *uniformément en* f *pour* $f \in \mathcal{G}$, *avec* $M[f] + N[f] \leqq \rho$, *presque-sûrement la moyenne arithmétique* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$ *tend vers*

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\,dP(e) = E[f(X_j)]$$

et (avec la même uniformité en f*)*

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - E[f(X_j)]\right| \to 0.$$

6° *Application.* — Comme espace $\mathfrak{X}$ prenons le plan euclidien ; on peut supposer ce plan orienté, de sorte que les deux demi-plans que détermine dans $\mathfrak{X}$ un axe arbitraire Δ peuvent être distingués l'un de l'autre, par exemple l'un étant qualifié de demi-plan à gauche (de Δ) et l'autre de demi-plan à droite ; nous désignerons par Δ^- le demi-plan à gauche, étant entendu pour fixer les idées que Δ ne fait pas partie de Δ^-.

Soient $\Delta_{-\varepsilon}$ et $\Delta_{+\varepsilon}$ les deux parallèles à Δ, situées à une distance ε ($\varepsilon > 0$) de Δ, respectivement à gauche et à droite.

Soit $P(e)$ une loi de probabilité sur le plan $\mathfrak{X}$, absolument continue par rapport à la mesure de Borel ; nous allons étudier la convergence de $P_n(\Delta^-)$ vers $P(\Delta^-)$.

Soient :

$f(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-$, 0 si $x \notin \Delta^-$;

$f_-(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-_{-\varepsilon}$, 0 si $x \notin \Delta^-$, $\frac{\delta(x)}{\varepsilon}$, pour $x \notin \Delta^-_{-\varepsilon}$ et $\in \Delta^-$, $\delta(x)$, désignant la distance de x à Δ ;

$f_+(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-$, 0 si $x \notin \Delta^-_{+\varepsilon}$, $1 - \frac{\delta(x)}{\varepsilon}$ pour $x \notin \Delta^-$ et $\in \Delta^-_{+\varepsilon}$ en désignant encore par $\delta(x)$ la distance de x à Δ.

On a :

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \quad (x \in \mathfrak{X}); \tag{6.1}$$

$f_-(x)$ et $f_+(x)$ appartiennent à $\mathcal{G}$ et sont de même norme :

$$\| f_- \| = \| f_+ \| = 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

$P_n(\Delta^-)$ a pour valeur :

$$P_n(\Delta^-) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(X_j).$$

Posons

$$Q_n^+ = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_+(X_j), \qquad Q_n^- = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_-(X_j);$$

d'après (6.1), il vient ;

$$Q_n^- \leq P_n(\Delta^-) \leq Q_n^+. \tag{6.2}$$

Or :

$$P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-) = [P_n(\Delta^-) - Q_n^+] + [Q_n^+ - P(\Delta^-_{+\varepsilon})] + [P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-)].$$

D'après (6.2) :

$$|P_n(\Delta^-) - Q_n^+| \leq |Q_n^+ - Q_n^-| \leq |Q_n^+ - P(\Delta^-_{+\varepsilon})| + |P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon})| + |P(\Delta^-_{-\varepsilon}) - Q_n^-|,$$

de sorte que :

$$|P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-)| \leq 2|P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon})| + 2|Q_n^+ - P(\Delta^-_{+\varepsilon})| + |Q_n^- - P(\Delta^-_{-\varepsilon})|. \tag{6.3}$$

De plus on a visiblement :

$$P(\Delta^-) \leq E[f_+(X_j)] \leq P(\Delta^-_{+\varepsilon}),$$
$$P(\Delta^-_{-\varepsilon}) \leq E[f_-(X_j)] \leq P(\Delta^-).$$

De (6.3) on tire alors :

$$|P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-)| \leq 5|P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon})| + 2|Q_n^+ - E[f_+(X_j)]| + |Q_n^- - E[f_-(X_j)]|. \tag{6.4}$$

Prenons ε assez petit pour que, quel que soit Δ, on ait :

$$P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(^-_{-\varepsilon}) < \eta$$

(η, nombre positif arbitraire), ce qui est possible puisque $P(e)$ est absolument continue; ε étant ainsi choisi, d'après le théorème 4, 3°), presque-sûrement,

$$|Q_n^+ - E[f_+(X_j)]| \quad \text{et} \quad |Q_n^- - E[f_-(X_j)]|$$

tendent vers zéro, uniformément par rapport à Δ puisque, lorsque ε est fixé, les normes $\|f_+\|$ et $\|f_-\|$ ne dépendent pas de Δ. On en conclut que :

THÉORÈME 5. — *Lorsque* $n \to +\infty$, *presque-sûrement* $P_n(\Delta^-)$ *tend vers* $P(\Delta^-)$ *uniformément par rapport à* Δ.

Un résultat analogue a été obtenu (mais non encore publié) par J. Wolfowitz, qui a prouvé que $P_n(\Delta^-)$ tend presque-sûrement vers $P(\Delta^-)$ uniformément par rapport à Δ, mais en introduisant une hypothèse supplémentaire inutile. Ce théorème peut s'étendre dans diverses directions :

1° La restriction que $P(e)$ est absolument continue peut évidemment être sinon supprimée, du moins élargie;

2° On peut obtenir un résultat analogue pour d'autres familles de sous-ensembles du plan que la famille des demi-plans (par exemple, la famille des sous-ensembles déduits d'un sous-ensemble donné par un déplacement arbitraire);

3° On peut évidemment appliquer le théorème 5, *mutatis mutandis*, à n'importe quel espace euclidien $\mathfrak{X}$ à un nombre fini quelconque de dimensions. Prenons en particulier le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite euclidienne : le rôle de Δ est alors joué par un nombre x arbitraire, $P(e)$ et $P_n(e)$ sont caractérisées par leurs fonctions de répartition $F(x)$ et $F_n(x)$; $F(x)$ étant absolument continue, on obtient que :

Presque-sûrement lorsque $n \to +\infty$, $|F_n(x) - F(x)|$ tend vers zéro, uniformément en x; ce qui est le théorème classique de Glivenko-Cantelli; plus précisément c'est le résultat de Glivenko : on passe sans difficulté au théorème général de Glivenko-Cantelli en levant la restriction que $F(x)$ est absolument continue.

Remarque. — Par rapport à la méthode du paragraphe 2 reposant sur la considération de la classe $\mathcal{F}$ de fonctions f, la variante du paragraphe 5 a consisté à *restreindre* la classe des fonctions f, réduite à l'espace $\mathcal{G}$ qui est un sous-espace de $\mathcal{F}$, de manière à pouvoir corrélativement élargir la classe des $P(e)$: cet élargissement s'est marqué par la suppression de la condition (2.6).

Mais il peut, au contraire, être avantageux de disposer de résultats concernant des $P(e)$ plus particulières, mais s'appliquant à des f plus générales : par exemple dans le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite $x'Ox$, la considération des moments d'ordre supérieur au premier oblige à introduire des fonctions f du type : $f(x) = |x|^\alpha$, avec $\alpha > 1$, qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$. Il est facile d'adapter la méthode et d'élargir $\mathcal{F}$ de façon à englober de telles f, par exemple de la façon suivante :

Appelons $\mathcal{F}_{(\alpha)}$, $\alpha > 1$, quelconque, l'espace des fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions suivantes, où x_0 désigne un point fixe arbitraire de $\mathfrak{X}$:

$$a. \quad \underset{\substack{(x_0, x') \leq r \\ (x_0, x'') \leq r}}{\text{b. s.}} \frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')} = \mathrm{M}(r) < +\infty;$$

$$b. \quad \underset{r}{\text{b. s.}} \min\left[\mathrm{M}(r), \frac{\mathrm{M}(r)}{r^{\alpha-1}}\right] = \mathrm{M}_{(\alpha)}[f] < +\infty.$$

On constate que $\mathcal{F}_{(\alpha)}$, si l'on y prend $\mathrm{M}_{(\alpha)}[f]$ comme norme de f, est un espace de Banach; les fonctions f qui appartiennent à $\mathcal{F}_{(\alpha)}$ ne dépendent pas de x_0, par contre la norme $\mathrm{M}_{(\alpha)}[f]$ dépend de x_0. Comme pour $\mathcal{F}$, deux fonctions f et g de $\mathcal{F}_{(\alpha)}$ qui diffèrent d'une constante doivent être considérées comme identiques.

Supposons maintenant que $\mathrm{P}(e)$ soit telle que :

$$(6.5) \qquad \int_{\mathfrak{X}} (x_0, x)^{\alpha} \, d\mathrm{P}(e) < +\infty,$$

condition d'ailleurs indépendante de x_0, on vérifie que les raisonnements du paragraphe 2, (6.5) jouant le rôle de (2.6), peuvent être reproduits *mutatis mutandis*, ce qui conduit à des énoncés analogues à ceux du paragraphe 3, que le lecteur formulera lui-même sans peine.

SECTION II.

7. Un exemple de construction directe de $\mathcal{E}'$. — Il y a des cas où il est possible de construire $\mathcal{E}'$ directement. A titre d'exemple, considérons le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite et où la fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$ caractérisant $\mathrm{P}(e)$ est continue; le changement de variable :

$$u = \mathrm{F}(x)$$

permet alors, comme il est classique, de se ramener au cas où les X_j sont des variables aléatoires de loi uniforme sur le segment (0, 1); plaçons-nous dans ces conditions. Soit $\mathcal{H}$ l'espace, de Hilbert et séparable, des fonctions $f(u)$ de carré sommable sur (0, 1) :

$$\int_0^1 |f(u)|^2 \, du < +\infty.$$

Toute fonction de répartition $\mathrm{F}(u)$ sur (0, 1), étant monotone, bornée, appartient à $\mathcal{H}$: en particulier la fonction de répartition $\mathrm{F}(u; \mathrm{X}_j)$ caractérisant $\varphi(e; \mathrm{X}_j)$, celle $\mathrm{F}_n(u)$ caractérisant $\mathrm{P}_n(e)$ sont des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathcal{H}$: on peut donc adopter $\mathcal{H}$ comme espace $\mathcal{E}'$.

On vérifie que l'élément aléatoire $F(u;\, X_j)$ satisfait aux conditions a, b, c (*cf.* p. 279) voulues pour que les théorèmes de E. Mourier [1] et R. Fortet et E. Mourier [1] utilisés précédemment soient applicables; en particulier, l'espérance mathématique de $F(u;\, X_j)$ est la fonction $f(u) = u$ sur $(0, 1)$; de plus :

$$E[\,\|F(u;\, X_j)\|^2\,] < +\infty. \tag{7.1}$$

Il en résulte :

THÉORÈME 6. — *Lorsque* $n \to +\infty$:

1° *Presque-sûrement*, $\int_0^1 |F_n(u) - u|^2\, du \to 0$;

2° $E\left[\int_0^1 |F_n(u) - u|^2\, du\right] \to 0$;

3° *Quel que soit le nombre positif* ρ, *uniformément pour* $f(u)$ *telle que :* $\int_0^1 |f(u)|^2\, du \leq \rho$, *presque-sûrement la moyenne arithmétique* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$ *tend vers* $\int_0^1 f(u)\, du$ *et (avec la même uniformité en* f*) :*

$$E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \int_2^1 f(u)\, du\right|^2\right] \to 0.$$

On peut d'ailleurs compléter ces résultats en utilisant le fait que $\mathcal{E}' = \mathcal{H}$ n'est pas un espace de Banach séparable quelconque, mais un espace de Hilbert.

Dans ces conditions, et compte tenu de (7.1), il résulte d'un théorème de E. Mourier [1] que, lorsque $n \to \infty$, la loi de probabilité de :

$$\sqrt{n}\,[F_n(u) - u]$$

(comme élément aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathcal{H}$) tend vers une loi laplacienne qu'on peut définir par sa caractéristique; comme une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathcal{H}$ se définit par une fonction arbitraire $f(u)$ de carré sommable sur $(0, 1)$, cette caractéristique peut se représenter par :

$$\varphi(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}E\left\{\left[\int_0^1 f(u)[F(u;\, X_j) - u]\, du\right]^2\right\}\right). \tag{7.2}$$

Désignons par Z un élément aléatoire laplacien prenant ses valeurs dans $\mathcal{H}$ et obéissant à la loi de caractéristique (7.2). Un théorème de R. Fortet et E. Mourier [2] nous indique alors que, lorsque $n \to +\infty$, la fonction de répartition de :

$$\Omega_n^2 = n\,\|F_n(u) - u\|^2 = n\int_0^1 |F_n(u) - u|^2\, du$$

tend vers la fonction de répartition de $\|Z\|^2$.

Or, un second théorème de R. Fortet et E. Mourier [2] nous permet de déterminer la fonction de répartition de $\|Z\|^2$; posons :

$$\Phi(f, g) = \mathrm{E}\left\{\int_0^1 \int_0^1 f(u)g(v)[\mathrm{F}(u; \mathrm{X}_j) - u][\mathrm{F}(v; \mathrm{X}_j) - v]\,du\,dv\right\}.$$

$\Phi(f, g)$ est une forme bilinéaire par rapport aux deux éléments f et g de $\mathcal{H}$; c'est une forme complètement continue et définie positive, possédant un déterminant de Fredholm $\mathrm{D}(\lambda)$, qui n'est autre que le déterminant de Fredholm classique de l'opération linéaire intégrale symétrique définie positive et complètement continue :

$$(7.3) \qquad g(v) = \int \mathrm{E}\{[\mathrm{F}(u; \mathrm{X}_j) - u][\mathrm{F}(v; \mathrm{X}_j) - v]\} f(u)\,du.$$

On sait que la caractéristique $\varphi(r) = \mathrm{E}[e^{ir\|Z\|^2}]$ de $\|Z\|^2$ est égale à :

$$(7.4) \qquad \varphi(r) = [\mathrm{D}(2ir)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Un calcul simple montre que :

$$\mathrm{E}\{[\mathrm{F}(u; \mathrm{X}_j) - u][\mathrm{F}(v; \mathrm{X}_j) - v]\} = [\min(u, v) - uv],$$

de sorte que (7.3) s'écrit :

$$(7.5) \qquad g(v) = \int_0^1 [\min(u, v) - uv] f(u)\,du.$$

La détermination du déterminant de Fredholm $\mathrm{D}(\lambda)$ de (7.5) est classique (*cf.* M. Kac [1]); on trouve

$$\mathrm{D}(\lambda) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}}$$

et, par suite,

$$(7.6) \qquad \varphi(r) = \left[\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{-2ir})}{\sqrt{-2ir}}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

de sorte que la fonction de répartition de Ω_n^2 tend vers celle de caractéristique (7.6), résultat indiqué pour la première fois par H. Cramer. Il est clair que l'on pourrait opérer de façon tout à fait semblable à partir, au lieu de $\mathcal{H}$, de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}'$ des fonctions $f(u)$ de carré sommable sur (0, 1), non plus par rapport à la mesure — B, mais par rapport à une mesure arbitraire; on retrouve alors très simplement les résultats de T. W. Anderson et D. A. Darling [1] qui sont une extension du résultat de Cramer.

Une autre extension consiste à traiter par la même méthode le cas où $\mathfrak{X}$ est un espace euclidien à un nombre fini quelconque s de dimensions : quel que soit s il est possible de caractériser $\mathrm{P}(e)$ et $\mathrm{P}_n(e)$ par des fonctions de répartition $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ et $\mathrm{F}_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ à s variables : tout ce qui précède peut être refait, y compris la détermination de la loi asymptotique de $n\|F_n - F\|^2$; mais on remarquera que, pour $P(e)$ et $P_n(e)$ données, $F(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ dépendent des axes auxquels on rapporte $\mathfrak{X}$.

L'exemple qui a fait l'objet de ce paragraphe montre que lorsque $\mathcal{E}'$ est un espace de Hilbert, il devient possible d'adjoindre aux théorème du type de ceux obtenus à la section I, d'intéressants résultats, comme la loi asymptotique de Ω_n^2.

Nous exposerons dans un autre Mémoire comment on peut systématiquement rechercher un espace $\mathcal{E}'$ qui soit un espace de Hilbert.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. W. ANDERSON et D. A. DARLING, *Asymptotic Theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic Processes* (*Ann. Math. Stat.*, t. **23**, nº **2**, june 1952).

[1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson et Cie édit., Paris, 1953.

[1] R. FORTET et E. MOURIER, *Loi des grands nombres et théorie ergodique* (*C. R. Acad. Sci.*, **234**, 1952, p. 699).

[2] R. FORTET et E. MOURIER, *Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach* (à l'impression).

[1] M. KAC, *On some connections between probability theory and differential and integral equations* (Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press).

[1] E. MOURIBR, *Éléments aléatoires dans un espace de Banach* (*Thèse de Doctorat*, Paris, 1952).