King-Lai Hiong

Sur les fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 2 (1953), p. 149-180
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_2_149_0>

SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES ADMETTANT DES VALEURS EXCEPTIONNELLES

Par M. King-Lai HIONG.

1. Nous considérons les fonctions holomorphes dans le cercle unité, ne s'annulant que p fois et admettant 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel ou au sens de R. Nevanlinna; et nous nous proposons de trouver, pour une telle fonction $f(z)$, une limitation qui ne dépend que de $f(0)$ et $|z|$ et qui est valable pour tout l'intérieur du cercle unité, sauf peut-être en certains points isolés.

Il est naturel de partir du second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna (¹). Mais alors une difficulté réside dans l'élimination de la seconde valeur initiale qui figure dans son inégalité, comme A. Bloch a déjà remarqué (²) pour tout problème ayant pour but la traduction en termes finis de ce théorème. Et puis, nous observons que la méthode utilisée par M. Valiron dans sa nouvelle démonstration du théorème de M. Schottky (³) ne s'applique pas. Car ici l'origine ne doit pas, peut-être, être déplacée et la fonction prend la valeur 1.

Au lieu de l'inégalité fondamentale sous sa forme définitive, nous prenons pour point de départ l'inégalité

$$\sum_{\nu}^{q} m(r, \alpha_\nu) < m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \sum \frac{f'}{f - \alpha_\nu}\right) + q \log \frac{2q}{d} + \log 3$$

et nous parvenons à établir un lemme qui fournit pour $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ une limitation ne dépendant pas de la valeur à éliminer. Grâce à ce lemme et à d'autres lemmes, nous arrivons aisément à un résultat en vue.

(¹) R. Nevanlinna, *Théorème de Picard-Borel*, Paris, 1929.
(²) Voir *Mém. Soc. Math.*, t. 20, p. 48.
(³) Valiron, *Actual. Scient. et Ind.*, nº 570, 1937, p. 12-15.

Les théorèmes ainsi obtenus sont assez simples et les énoncés sont proches de celui du théorème de M. Schottky.

Dans chacun des deux cas considérés, au moyen du théorème établi et à l'aide d'un résultat important de M. Montel, nous trouvons ensuite pour une famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité, des critères de normalité en liaison avec la valeur exceptionnelle, puis un critère de quasi-normalité qui généralise un théorème classique dû à M. Montel. Pour le dernier critère, il convient de remarquer qu'il peut être aussi démontré et d'une façon très simple par ce théorème même.

Les résultats obtenus ainsi dans le cas des fonctions holomorphes s'étendent aisément à celui des fonctions méromorphes ainsi qu'à celui d'un domaine connexe quelconque.

En ce qui concerne la croissance d'une fonction, à part de l'inégalité que nous utilisons dans chaque cas pour l'étude de la normalité ou de la quasi-normalité, nous en établissons encore d'autres dont deux (une pour une fonction holomorphe et une pour une fonction méromorphe) sont analogues à celles données par M. Valiron dans le cas où la valeur 1 n'est prise qu'un nombre fini de fois par la fonction.

Enfin, nous constatons que les mêmes résultats que dans les deux cas envisagés peuvent s'obtenir dans un cas plus général où 1 n'est pas nécessairement une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel ou au sens de R. Nevanlinna, mais l'indice $N(r, 1)$ satisfait à une certaine condition ([4]).

Je tiens à exprimer ici ma vive gratitude à M. Paul Montel pour l'intérêt qu'il m'a témoigné; de ses entretiens bienveillants qui eurent lieu au début de ces recherches, j'ai tiré grand profit pour mon problème en ce qui concerne la belle théorie de familles normales fondée par lui. Je remercie également M. Georges Valiron d'avoir bien voulu me faire une remarque importante au premier résultat de ce travail. Qu'il me soit permis encore d'adresser mes remerciements au Centre National de la Recherche Scientifique et à l'Aide à la Recherche Scientifique qui m'ont aidé dans un état de santé difficile.

PRÉLIMINAIRES.

1. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité; si a_ν et b_μ désignent respectivement ses zéros et ses pôles compris dans le cercle $|z| < R$,

---

([4]) Une partie des résultats contenus dans ce Mémoire a fait l'objet d'une Note aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1322. Mais nous avons ici quelques améliorations.

on a pour $|z| < R$ la formule de Poisson-Jensen établie par M. R Nevanlinna :

$$\begin{aligned}(1)\qquad \log f(z) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi \\ & -\sum_\nu \log \frac{R^2-\bar{a}_\nu z}{R(z-a_\nu)} + \sum_\mu \log \frac{R^2-\bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)} + iC,\end{aligned}$$

où $\bar{a}$ est la conjuguée de a et C une constante (⁵).

Si l'on prend les parties réelles des deux membres de (1), il vient, en posant $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}(2)\qquad \log|f(z)| = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi \\ & -\sum_\nu \log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\nu z}{R(z-a_\nu)}\right| + \sum_\mu \log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}\right|.\end{aligned}$$

En remarquant que les logarithmes sous les signes $\sum$ sont positifs, on déduit de (2) l'inégalité

$$(3)\qquad \log|f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} m(R, f) - \frac{R-r}{R+r} m\left(R, \frac{1}{f}\right) + \sum_\mu \log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu z}{R(z-b_\mu)}\right|$$

pour $|z| = r < R < 1$. Si $f(z)$ est holomorphe, le dernier terme disparaîtra.

2. En ce qui concerne la théorie des familles normales, rappelons un résultat de M. Montel qui nous sera important dans la suite et qui peut s'énoncer ainsi :

I. *Soit une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine* D, *qui s'y annulent chacune p fois au plus; de toute suite infinie $f_n(z)$ des fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle $f_{\lambda_n}(z)$ et trouver au plus p point $A_i (i = 1, \ldots, p)$ tels qu'en traçant de chaque A_i comme centre un cercle (σ_i) de rayon η_i arbitrairement petit, chaque $f_{\lambda_n}(z)$ de la suite ait un zéro dans chaque (σ_i) et n'en ait pas à l'extérieur des (σ_i), les zéros étant comptés avec leur ordre de multiplicité.*

Rappelons encore la proposition suivante due également à M. Montel :

II. *Une famille quasi normale de fonctions holomorphes ne prenant pas une valeur est une famille normale.*

3. Nous aurons besoin du théorème de M. Borel sur les fonctions croissantes que M. Bureau a précisé sous la forme :

(⁵) *Voir* VALIRON, *loc. cit.*, p. 9.
(⁶) MONTEL, *Mém. Acad. Roy. de Belgique*, série 2, t. VI, 1922, p. 8-10.

Lemme A. — *Si* U(r) *est une fonction réelle positive non décroissante pour* $0 < r < 1$, *et si*

$$U(r) \leqq \sigma + \sigma_1 \log \frac{1}{R-r} + \sigma_2 \overset{+}{\log} U(R), \tag{4}$$

avec $r_0 \leqq r < R < 1$, $\sigma \geqq 0$ *et* $\sigma_1 \geqq 2\sigma_2 > 8$, *on a*

$$U(r) \leqq \sigma(\sigma_2 + 1) + \sigma_1(\sigma_2 + 3) \log \frac{1}{1-r} \tag{5}$$

pour $r \geqq r_0$ *et* $r > 1 - \frac{1}{\sigma_2}$.

Mais nous emploierons surtout le lemme suivant que nous déduisons du précédent :

Lemme B. — *Si* U(r) *est une fonction positive non décroissante pour* $0 < r < 1$ *et si, pour* $r_0 \leqq r < R < 1$,

$$U(r) \leqq \frac{1}{(R-r)^p} \left[a + b \log \frac{1}{R-r} + c \overset{+}{\log} U(R) \right], \tag{6}$$

p étant un entier supérieur ou égal à 0 *et* a, b, c, *trois constantes supérieures ou égales à* 1, *on a pour* $r \geqq r_0$ *et* $r \geqq \frac{4}{5}$,

$$U(r) < \frac{1}{(1-r)^p} \left(A a + B \log \frac{2}{1-r} \right), \tag{7}$$

où A *et* B *sont deux constantes ne dépendant que de* b, c *et* p.

Pour le démontrer, prenons le $\overset{+}{\log}$ des deux membres de (6); il vient

$$\overset{+}{\log} U(r) \leqq \log 3abc + (p+1) \log \frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} U(R),$$

inégalité qui prend la forme

$$\overset{+}{\log} U(r) \leqq \sigma + \sigma_1 \log \frac{1}{R-r} + \sigma_2 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} U(R). \tag{8}$$

Par hypothèse, $\sigma = \log 3abc > 0$, si l'on choisit σ_1 et σ_2 tels que $\sigma_1 \geqq p + 1$ et $\sigma_1 \geqq 2\sigma > 8$, le lemme A sera applicable à la fonction $\overset{+}{\log} U(r)$. Ainsi en prenant $\sigma_2 = 5$ et σ_1 égal au plus grand des deux nombres 10 et $p + 1$, on obtient

$$\overset{+}{\log} U(r) < 6 \log 3abc + 8\sigma_1 \log \frac{1}{1-r}$$

pour $r \geqq r_0$ et $r > 1 - \frac{1}{\sigma_2}$. Cette inégalité peut s'écrire *a fortiori*

$$\overset{+}{\log} U(r) < 6a + 8(b + c + \sigma_p + 3) \log \frac{1}{1-r}.$$

Portons cette borne dans (6) et posons $R = r + \frac{1}{2}(1 - r)$; il vient

$$U(r) < \frac{2^{p+3}}{(1-r)^p}\left[(1+c)a + c(2b+c+\sigma+3)\log\frac{2}{1-r}\right], \tag{9}$$

où $\sigma \geqq p+1$ et $\sigma \geqq \frac{4}{5}$.

PREMIÈRE PARTIE.

Cas où un est une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel.

I. — Étude de la croissance d'une fonction.

4. Pour cette étude, il est essentiel d'effectuer l'élimination dont nous avons parlé dans l'introduction; nous commençons par établir deux lemmes sur le second desquels repose principalement notre méthode d'élimination.

Lemme I. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; si l'on désigne par $a_\nu[\nu = 1, \ldots, n(r, 0)]$ ses zéros dans le cercle $|z| = r$ (contour compris) et si l'on décrit de chaque point a_ν comme centre un petit cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ_ν, on a, pour $0 \leqq r < \rho < 1$,*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log V(\rho, f) \tag{10}$$

où $V(r, f) = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right)$, A_k, B_k, C_k *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k (7).

De la formule de Poisson-Jensen, on déduit en dérivant

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi} - z)^2} d\varphi + \sum_{\nu=1}^{n(R,0)} \frac{R^2 - |a_\nu|^2}{(z - a_\nu)(R^2 - \bar{a}_\nu z)}, \tag{11}$$

où a_ν sont les zéros de $f(z)$ tels que $|a_\nu| < R$; z est un point intérieur au cercle $|z| = R$. D'une façon générale,

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] = {} & \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi} - z)^{\nu+1}} d\varphi \\ & + \sum_\nu^{n(R,0)} \left[\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z-a_\nu)^k} + \frac{(k-1)!\,\bar{a}_\nu^{k-1}}{(R^2 - \bar{a}_\nu z)^k}\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Si l'on pose $|z| = r$ et si l'on suppose que r suffisamment près de R pour que $|a_\nu| \leqq r$ et en prenant $R = r + \varepsilon$, on ait $n(R, 0) \leqq \lambda n(r, 0)$, λ étant un

(7) Dans la suite, nous désignerons toujours par A, B, C, $A_1, \ldots, A', \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots$, H, K, $H_1, \ldots$ des constantes numériques.

nombre positif, il vient pour toute valeur de r telle que $r+\varepsilon<1$,

$$(12') \qquad \left|\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right]\right| \leqq \frac{k\,!\,2\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{k+1}}\mathrm{V}(\mathrm{R}, f)+(k-1)\,!\,\lambda\sum_{\nu}\left[\frac{1}{\delta_\nu^k}+\frac{1}{(\mathrm{R}-r)^k}\right]$$
$$<\mathrm{P}_k\left[\mathrm{R}, \sum\frac{1}{\delta_\nu}, \frac{1}{\mathrm{R}-r}, n(r, 0), \mathrm{V}\right] \qquad [\nu=1, \ldots, n(r, 0)],$$

P_k étant un polynome des arguments.

De (12′) on déduit, en désignant par Q_k un polynome comme P_k,

$$\left|\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\left[\frac{f''}{f}\right]\right| < \mathrm{Q}_k\left[\mathrm{R}, \sum\frac{1}{\delta_\nu^k}, \frac{1}{\mathrm{R}-r}, n(r, 0), \mathrm{V}\right] \qquad (\nu=1, \ldots, p)$$

on trouve finalement en répétant l'opération

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < \overline{\mathrm{P}}_k\left[\mathrm{R}, \sum\frac{1}{\delta_\nu^k}, \frac{1}{\mathrm{R}-r}, n(r, 0), \mathrm{V}\right] \qquad (\nu=1, \ldots, p),$$

$\overline{\mathrm{P}}_k$ désignant un polynome comme P_k. Si l'on prend le $\overset{+}{\log}$ des deux membres de cette inégalité, il vient, en remarquant que $n(r, 0)<\Sigma\log\frac{1}{\delta_\nu}$ dès que $\delta_\nu<\frac{1}{|a_1|}$,

$$(13) \qquad \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < \mathrm{A}'_k\sum_\nu\log\frac{1}{\delta_\nu}+\mathrm{B}'_k\log\frac{1}{\mathrm{R}-r}+\mathrm{C}'_k\overset{+}{\log}\mathrm{V}(\mathrm{R}, f).$$

Pour $r<\rho<1$, on peut avoir $\mathrm{R}-r\geqq h(\rho-r)$ en prenant h positif assez petit; par suite l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(13') \qquad \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < \mathrm{A}''_k\sum_\nu\log\frac{1}{\delta_\nu}+\mathrm{B}''_k\log\frac{1}{\rho-r}+\mathrm{C}''_k\overset{+}{\log}\mathrm{V}(\rho, f).$$

En calculant la valeur moyenne de (13′) sur la circonférence $|z|=r$, nous obtenons une inégalité de la forme (10) qui est valable pour $r+\varepsilon<1$, mais quelque petit que soit ε.

Et si $f(z)$ ne s'annule pas, on retrouve l'inégalité connue ([8])

$$(10') \qquad m\left(\mathrm{R}, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < \mathrm{A}_k+\mathrm{B}_k\log\frac{1}{\rho-r}+\mathrm{C}_k\overset{+}{\log}\mathrm{V}(\rho, f)$$

pour $0\leqq r<\rho<1$.

Lemme II. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; en conservant les notions du lemme* I *et en supposant $f(0)\neq 0$, on a ou bien pour tout point intérieur au cercle $|z|=r$*

$$(14) \qquad |f(z)|<|f(0)|+\mathrm{M}_k,$$

ou bien pour $0\leqq r_0\leqq r<\rho<1$, l'inégalité

$$(15) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{n(r,0)}\log\frac{1}{\delta_\nu}\right)\right.$$
$$\left.+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\log\mathrm{V}(\rho, f)\right]$$

où M_k, α_k, β_k, γ_k sont des constantes numériques ne dépendant que de k.

([8]) *Voir* Valiron, *loc. cit.*, p. 12.

Désignons par (C_r) le cercle $|z|=r(r<1)$ et par D le domaine limité par les circonférences (C_r) et (γ_ν) $[\nu=1, \ldots, n(r, 0)]$.

Supposons d'abord que $|f^{(k)}(z)|<1$ quel que soit le point z du domaine D. Prenons arbitrairement un nombre assez grand M et choisissons dans l'intérieur de D, $k-1$ points $\zeta_i (i=1, \ldots, k-1)$ tels que $|f^{(i)}(\zeta_i)| \leq M$. Intégrons $f^{(k)}(z)$ le long d'une courbe rectifiable (L) située dans (D) joignant le point ζ_{k-1} à un point quelconque z de D. Il est aisé de voir que la ligne (L) peut être remplacée par une ligne brisée (Γ) située dans D et composée de segments de rayons de (C_r) et des arcs de circonférences centrées à o, telle que la longueur totale des segments ne dépasse pas 2 et celle des arcs 2π. Nous avons ainsi

$$|f^{(k-1)}(z)| < |f^{(k-1)}(\zeta_{k-1})| + \left|\int_{\zeta_{k-1}}^{z} f^{(k)}(z)\,dz\right| < M + 2(\pi+1)$$

et nous trouvons de la même façon, en posant $2\pi + 2 = Q$,

$$(16)\qquad \begin{cases} |f^{(k-2)}(z)| < |f^{(k-2)}(\zeta_{k-2})| + \left|\displaystyle\int_{\zeta_{k-2}}^{z} f^{(k-1)}(z)\,dz\right| < (1+Q)M + Q^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |f'(z)| < \dfrac{Q^{k-1}-1}{Q-1} M + Q^{k-1}, \end{cases}$$

En intégrant une dernière fois de o à z, on a donc pour tout point z de D

$$|f(z)| < |f(0)| + M_k,$$

M_k étant une constante numérique ne dépendant que de k.

Soit maintenant ζ un point quelconque intérieur à (C_r); nous pouvons tracer un cercle de centre O et de rayon $r' < r$, qui contient ce point et qui est situé dans D. Alors l'inégalité (14) a lieu sur (C') et en vertu d'un théorème bien connu sur le module maximum, elle sera vérifiée pour le point ζ.

Supposons maintenant que la circonstance précédente ne se présente pas; il existe alors dans D au moins un point z_1 tel que $|f^{(k)}(z_1)| \geq 1$. Supposons que dans le développement en série entière de $f(z)$, le premier coefficient non nul est C_h. Si alors $k<h$, on a $f^{(k)}(0)=0$ et z_1 est nécessairement distinct de o; si $k \geq h$, deux cas peuvent se présenter suivant que le point z_1 est l'origine ou non.

Dans le premier cas, on peut appliquer la formule de Jensen et l'on a

$$(17)\qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f^{(k)}(0)}\right|,$$

par suite

$$(18)\qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|.$$

En prenant les δ_ν assez petits, il est évident que

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) < \Sigma \log \frac{1}{\delta_\nu}.$$

D'après le lemme I, on a donc

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < A_k\left(\log|f(0)| + \Sigma \log \frac{1}{\delta_\nu}\right) + B_k \log \frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} V(\rho, f),$$

inégalité qui entre dans (15).

Considérons maintenant le second cas ainsi que le cas où $k < h$. Nous avons alors $|z_1| = r_1 > 0$ et $|f^{(k)}(z_1)| \geqq 1$. Appliquons la relation (3) à la fonction $\frac{f^{(k)}}{f}$ pour le point z_1; il vient

$$(19) \quad m\left(R, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \left(\frac{R + r_1}{R - r_1}\right)^2 m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{R + r_1}{R - r_1}\left[\log\left|\frac{f(z_1)}{f^{(k)}(z_1)}\right| + \sum_\nu \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\nu z}{z(z - a_\nu)}\right|\right] \qquad [\nu = 1, \ldots, n(R, 0)].$$

Puisque $|f^{(k)}(z_1)| \geqq 1$, en prenant une valeur r_0 suffisamment grande, on a pour $r_0 \leqq r < R < 1$,

$$|f(z_1)| < |f^{(k)}(z_1)| \frac{1}{1 - r} < |f^{(k)}(z_1)| \frac{1}{R - r}.$$

Si l'on prend alors $r_0 \geqq r_1$ et r assez près de R de sorte que $n(r, 0) = n(R, 0)$, l'inégalité (19) peut s'écrire

$$(20) \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{4}{(R - r)^2} m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{2}{R - r}\left[\log \frac{1}{R - r} + \sum_\nu^{n(r,0)} \log \frac{2}{\delta_\nu}\right].$$

Or d'après le lemme I

$$m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k \sum_\nu \log \frac{1}{\delta_\nu} + B_k\left[\log \frac{1}{\rho - R} + C_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right],$$

donc, si on choisit une valeur ρ_1 de ρ pour chaque valeur de r et un nombre positif h' tels que $\rho_1 - R \geqq h'(\rho - r)$, on déduit de (20) l'inégalité

$$(21) \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k \sum_\nu \log \frac{1}{\delta_\nu} + \beta'_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

qui entre évidemment dans (15).

En particulier si $f(z)$ ne s'annule pas, l'inégalité (15) se réduit encore à

$$(15') \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \overset{+}{\log} |f(0)| + \beta_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \log V(\rho, f)\right]$$

valable pour $0 \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$.

Remarque. — Dans la démonstration du lemme, au lieu du domaine D, on peut considérer le domaine D′ limité par les circonférences (C_r), (γ) et (γ_ν) $[\nu = 1, \ldots, n(r, 0)]$ en désignant par (γ) une circonférence de centre O et de rayon arbitrairement petit δ; on arrive ainsi à conclure que l'on a soit pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ une égalité de forme (14), soit pour $0 < \delta \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$,

$$(22) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \beta'_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$
$$[\nu = 1, \ldots, n(r, 0)].$$

Si $f(z)$ ne s'annule pas, cette inégalité se réduit à

$$(23) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k + \beta'_k \overset{+}{\log}\frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

valable pour $0 < \delta \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$.

5. Abordons maintenant l'étude de la croissance; nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Soit une fonction holomorphe dans le cercle unité ayant pour développement en série entière*

$$(24) \qquad f(z) = c_0 + c_h z^h + \ldots \qquad (c_0, c_h \neq 0)$$

et l'on suppose de plus que $c_0 \neq 1$; *si* $f(z)$ *ne s'annule que* p *fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, alors en désignant par* $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ *ses zéros et en décrivant de chaque* a_ν *comme centre un cercle* (γ_ν) *de rayon arbitrairement petit* δ_ν, *on a pour tout point* z *intérieur au cercle* $|z| = r$ *avec* $0 < \delta \leqq r < 1$, *l'inégalité*

$$(25) \qquad \log|f(z)| < \frac{1}{(1 - r)^3}\left[H\,\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right] \qquad (\nu = 1, \ldots, p),$$

où

$$\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) = \Omega(c_0) + \log\frac{1}{\delta} + \sum^p \log\frac{1}{\delta_\nu},$$

avec

$$\Omega(c_0) = \overset{+}{\log}|c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0 - 1}\right|$$

et H, K *sont des constantes numériques.*

Des inégalités établies par M. R. Nevanlinna (9), nous déduisons

$$(26) \qquad m(r, 1) < m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) + 7 \log 2.$$

---

(9) R. NEVANLINNA, *Théorème de Picard-Borel*, Paris, 1929, p. 65 et 141.

Ajoutons $N(r, 1)$ aux deux membres et appliquons ensuite au premier membre le premier théorème fondamental de M. R. Nevanlinna qui donne ici

$$m(r, 1) + N(r, 1) = m(r, f) + h(r, 1) \tag{27}$$

et

$$|h(r, 1)| \leqq \left| \log |c_0 - 1| \right| + \log 2,$$

il vient

$$m(r, f) < N(r, 1) + Q(r), \tag{28}$$

avec

$$Q(r) = m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \left| \log |c_0 - 1| \right| + 8 \log 2.$$

Cherchons une limitation pour le second membre de (28) et considérons en premier lieu le terme $N(r, 1)$. La relation (27) donne

$$N(r, 1) < m(r, f) + \left| \log |c_0 - 1| \right| + \log 2,$$

puis en vertu d'un résultat connu, pour une fonction holomorphe f dans le cercle unité admettant plus d'une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, le rapport $\dfrac{m(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$ est nécessairement borné, donc pour $r \geqq r_0$

$$m(r, f) < \lambda \log \frac{1}{1-r}, \tag{29}$$

λ étant une constante qui peut dépendre de c_0 et c_k. Mais en prenant le logarithme des deux membres de (29) on voit que pour r_0 suffisamment grand, on a

$$m(r, f) < \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^2$$

et *a fortiori*

$$N(r, 1) < \frac{1}{1-r} \log \frac{1}{1-r} + \left| \log |c_0 - 1| \right| + \log 2. \tag{30}$$

En second lieu, majorons le premier terme de $Q(r)$ et appliquons le lemme II du n° 4. Dans la première alternative de ce lemme, l'inégalité (25) est *a fortiori* vérifiée. Considérons donc la seconde; on a alors, pour $0 \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$, l'inégalité

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2} \left[\alpha_1 \left(\log |c_0| + \sum_{\nu}^{p} \log \frac{1}{\delta_\nu} \right) + \beta_1 \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \log V(\rho, f) \right]. \tag{31}$$

D'après la formule de Jensen, on a

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m(r, f) + \log \left| \frac{1}{c_0} \right|,$$

par suite

$$(32)\qquad \begin{cases} V(r, f) < 2m(r, f) + \log\left|\dfrac{1}{c_0}\right|, \\ \overset{+}{\log} V(r, f) < \overset{+}{\log} m(r, f) + \log\left|\dfrac{1}{c_0}\right| + 2\log 2, \end{cases}$$

l'inégalité (31) peut donc s'écrire

$$(33)\qquad m\left(r, \frac{f}{f'}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2} \times\left[\alpha'\left(\overset{+}{\log}|c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \sum^{p} \log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + \beta' \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma' \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]$$

pour $0 \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$.

Considérons en dernier lieu les deux termes suivants de $Q(r)$. M. R. Nevanlinna a donné pour $T\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ relatif à une fonction méromorphe f une limitation que nous pouvons mettre dans le cas présent sous la forme :

$$(34)\qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A_1\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right) + B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f),$$

pour $0 < \delta \leqq r < \rho < 1$, quelque petit que soit δ.

En appliquant cette inégalité à la fonction $f - 1$, il vient

$$(34')\qquad m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) < A'\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0 - 1}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right) + B' \frac{1}{\rho - r} + C' \overset{+}{\log} m(\rho, f).$$

Si l'on porte toutes les bornes données par (30), (33), (34) et (34′) dans (28), on obtient une inégalité de forme

$$(35)\qquad m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + \beta \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right].$$

Appliquons alors le lemme B à cette inégalité; il vient

$$(36)\qquad m(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right],$$

H, K étant deux constantes numériques.

Cette inégalité établie pour $r_0 \leqq r < 1$ reste valable pour $\delta \leqq r < r_0$, si l'on renforce éventuellement les coefficients H, K.

Maintenant l'inégalité (3) donne

$$(37)\qquad \log M(r, f) < \frac{R + r}{R - r} m(R, f),$$

et de (37) et (36), on déduit l'inégalité suivante, en prenant R tel que $R - r = 1 - R$

$$\log M(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right].$$

En vertu du théorème sur le module maximum que nous avons déjà appliqué dans la démonstration du lemme II, on peut conclure que pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ avec $0 < \delta \leqq r < 1$,

$$\log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K\log\frac{2}{1-r}\right].$$

En particulier, on a le théorème :

Théorème A_0. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par (24); si f ne s'annule pas et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, alors, en supposant $f(0) \neq 1$, on a, pour $0 < \delta \leqq r < 1$ et quelque petit que soit δ, l'inégalité*

$$\log M(r, f) < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta) + K\log\frac{2}{1-r}\right], \tag{25'}$$

où $\Omega(c_0, \delta) = \Omega(c_0) + \log\frac{1}{\delta}$ et H, K *sont des constantes numériques.*

II. — Critères de normalité ou de quasi-normalité.

6. Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité définies par un développement de forme (24). Nous appelons famille réduite de (f) toute famille de fonctions

$$\varphi(z) = A + c_h z^h + \ldots, \tag{38}$$

A étant un nombre quelconque, mais fixe par rapport aux différentes fonctions de la famille.

Le théorème A permet d'obtenir des critères de normalité ou de quasi-normalité. Démontrons d'abord le suivant :

Théorème I. — *Soit une famille de fonctions holomorphes $f(z)$ dans le cercle unité, qui sont définies par un développement de la forme (24) et dont les valeurs à l'origine sont en module bornées supérieurement; si elles s'annulent chacune p fois au plus et admettent* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, elles constituent une famille normale dans le cercle unité.*

Désignons par (γ) et (C_r) les cercles $|z| = \delta$ et $|z| = r$ respectivement; et supposons δ suffisamment petit et r suffisamment grand pour que tous les zéros de $f(z)$ se trouvent dans la couronne $C(\delta, r)$ limitée par (γ) et (C_r). En appliquant le critère de M. Montel concernant la quasi-normalité, on peut conclure immédiatement que la famille (f) est quasi normale d'ordre p au plus dans $C(\delta, r)$; mais nous allons démontrer par le théorème A qu'elle est normale dans (C_r) sans emploi d'aucun critère connu, seulement à l'aide des propositions du n° 2.

Supposons d'abord que $c_0 \neq 0, 1$; d'après la première de ces propositions, d'une suite infinie arbitrairement donnée $f_n(z)$ de la famille, on peut extraire une suite partielle $f_{\alpha_n}(z)$ et trouver p points $A_i (i=1, \ldots, p)$ au plus, tel qu'en traçant de chaque A_i comme centre un cercle (σ_i) de rayon arbitrairement petit η_i, les fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ ont chacune un zéro dans chaque (σ_i) et n'en ont aucun à l'extérieur des (σ_i). Ensuite, en désignant par $q=n(r, 1)$, le nombre maximum des zéros de chaque fonction $f_{\alpha_n}(z)-1$ compris dans (C_r), de la suite $f_{\alpha_n}(z)$, on peut extraire une suite infinie $f_{\beta_n}(z)$ et trouver q points $B_j (j=1, \ldots q)$ au plus, tel qu'en traçant de chaque B_j comme centre un cercle (σ'_j) de rayon arbitrairement petit η'_j, les fonctions $f_\beta(z)$ ont chacune un point 1 dans chaque (σ'_j) et n'en ont aucun à l'intérieur des (σ'_j).

Soient $a_{\beta_n, i}$ les zéros des fonctions $f_{\beta_n}(z)$ dans le cercle (σ_i) et $b_{\beta_n, j}$ ses points 1 dans le cercle (σ'_j). De chaque $a_{\beta_n, i}$ comme centre en fixant i, décrivons un petit cercle $(\gamma_{\beta_n, i})$ de rayon $\delta_{\beta_n, i}$ contenant (σ_i), puis de centre A_i, décrivons un petit cercle $(\bar{\sigma}_i)$ de rayon $\bar{\eta}_i$ contenant tous les cercles $(\gamma_{\beta_n, i}) (\beta_n = 1, 2, \ldots)$. De chaque $b_{\beta_n, j}$ comme centre, décrivons de même un petit cercle $(\gamma'_{\beta_n, j})$ de rayon $\delta'_{\beta_n, j}$ contenant (σ'_j), puis de centre B_j, décrivons un petit cercle $(\bar{\sigma}'_j)$ de rayon $\bar{\eta}_j$ contenant tous les cercles $(\gamma'_{\beta_n, j}) (\beta_n = 1, 2, \ldots)$. Désignons par D le domaine limité par les circonférences (γ), (C_r), $(\bar{\sigma}_i)$ et $(\bar{\sigma}'_j) (i=1, \ldots, p;$ $j=1, \ldots, q)$ et par D_{β_n} le domaine limité par (γ), (C_r), $(\gamma_{\beta_n, i})$ et $(\gamma'_{\beta_n, j})$ $(i=1, \ldots, p; j=1, q)$.

Distinguons trois cas :

1° Les valeurs $f_{\beta_n}(0)$ ont une limite $\gamma_0 \neq 0, 1$. On peut alors en extraire une suite infinie $f_{\gamma_n}(0)$ qui converge vers γ_0. Appliquons le théorème A à la fonction $f_{\gamma_n}(z)$; il vient

$$\log |f_{\gamma_n}(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(f_{\gamma_n}(0), \delta, \delta_{\gamma_n, i}) + K \log \frac{2}{1-r}\right],$$

avec

$$\Omega(f_{\gamma_n}, (0), \delta, \delta_{\gamma_n, i}) = \overset{+}{\log} |f_{\gamma_n}(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f_{\gamma_n}^{(0)}}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f_{\gamma_n}^{(0)} - 1}\right| + \log\frac{1}{\delta} + \sum_{i=1}^{p} \log\frac{1}{\delta_{\gamma_n, i}}.$$

La somme des trois premiers termes du second membre de cette égalité est bornée si on fait varier n et soit $\bar{\Omega}$ sa borne; et puis on a $\delta_{\gamma_n, i} > \eta_i$. Donc en désignant par η le plus petit des η_i, on a

$$\log |f_{\gamma_n}(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\left(\bar{\Omega} + \log\frac{1}{\delta} + p \log\frac{1}{\eta}\right) + K \log \frac{2}{1-r}\right]$$

valable pour tout point z du cercle $|z| = r$ et $0 < \delta \leqq r < 1$.

Cette inégalité montre que les fonctions de la suite $f_{\gamma_n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans (C_r). Il s'ensuit qu'elle est normale; elle est donc génératrice d'une suite uniformément convergente.

2° Les valeurs $f_{\beta_n}(0)$ n'ont qu'une limite $\gamma_0 = 0$. On peut en extraire une suite $f_{\gamma_n}(0)$ convergeant vers zéro. Considérons la suite des fonctions $f_{\gamma_n}(z)$ dans le domaine D; et posons $g_{\gamma_n}(z) = \frac{1}{f_{\gamma_n}(z)}$. Comme $f_{\gamma_n}(z)$ ne s'annule pas dans D, $g_{\gamma_n}(z)$ y est holomorphe. En posant

$$g_{\gamma_n}(z) = g_{\gamma_n}(0) + \psi_{\gamma_n}(z),$$

l'inégalité

$$|f_{\gamma_n}(z)| < \frac{1}{|g_{\gamma_n}(0)| - M(r, \psi_{\gamma_n})}$$

montre que la suite $f_{\gamma_n}(z)$ converge uniformément vers zéro.

3° $\gamma_0 = 1$. On démontre de la même façon que dans le cas précédent que de la suite $f_{\beta_n}(z)$, on peut extraire une suite qui converge uniformément vers 1 dans le domaine D.

En résumé, on peut conclure que la famille donnée est normale dans D. Comme δ, η_i et η'_j, par suite $\delta_{\beta_n, i}$, $\delta'_{\beta_n, j}$ ainsi que η_i, η'_j et η peuvent devenir aussi petits que l'on veut, elle l'est aussi dans le cercle (C_r) privé de points O, A_i et $B_j (i = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, q)$. Il s'ensuit que la famille donnée est quasi normale dans (C_r) avec les points O, A_i et B_j comme points irréguliers possibles. Nous allons démontrer que ce sont aussi des points réguliers.

O est régulier en vertu de la proposition II du n° 2, car les fonctions de la famille ne s'annulent pas dans (γ).

Prenons un point quelconque P parmi les points A_i et B_j, et traçons de centre P un petit cercle (γ') tel qu'il n'existe aucun de ces points sur son contour ou dans (γ') autre que P. La famille (f) est normale sur la circonférence (γ'); elle est donc génératrice d'une suite partielle $f_{\lambda_n}(z)$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe ou la constante infinie, comme les $f_{\lambda_n}(z)$ sont bornés dans leur ensemble sur (γ'), cette limite ne peut être infinie; par conséquent la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe sur (γ'). En vertu du théorème de Weierstrass, la convergence est alors uniforme pour tout le cercle (γ'), et l'on peut conclure que la famille est normale dans (γ').

Donc la famille est normale dans (C_r), et, par suite, dans le cercle unité puisque r peut être aussi près de 1 qu'on veut.

Si maintenant $f(0) = 0$, on peut poser

$$F(z) = f(z) + \lambda, \qquad \text{avec} \quad \lambda \neq 0, 1,$$

et ce qui précède est applicable aux fonctions $F(z)$. Or la convergence uniforme d'une suite de F entraîne celle de la suite correspondante de f, donc la normalité de la famille (F) entraîne celle de la famille (f). Si $f(0) = 1$, on pose

$$F(z) = f(z) + \lambda, \qquad \text{avec} \quad \lambda \neq 0, -1.$$

En particulier, on a la proposition :

Toute famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité, définies par un développement de la forme (38) *s'annulant chacune p fois au plus et admettant* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel est normale dans le cercle unité.*

THÉORÈME II. — *Toute famille de fonctions holomorphes $f(z)$ dans le cercle unité, telle que les fonctions $\varphi(z)$ de l'une de ses familles réduites s'annulent chacune p fois au plus et admettent* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est normale dans le cercle unité.*

D'après le théorème précédent, la famille (φ) est normale dans le cercle unité; nous allons démontrer, en nous inspirant d'un procédé de M. Montel, que la normalité de la famille (φ) entraîne celle de la famille (f). Posons

$$f(z) = \varphi(z) + C \quad \text{avec} \quad C = c_0 - A. \tag{39}$$

Je dis que de toute suite infinie $f_n(z)$ des fonctions de la famille (f), on peut extraire une suite uniformément convergente. En effet, à cette suite, correspond une suite $\varphi_n(z)$ de la famille (φ). Comme la dernière suite est normale, on peut en extraire une suite partielle $\varphi_{\alpha_n}(z)$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe $\Phi(z)$ ou la constante infinie. A cette suite, correspond une suite des fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ qui sont liées aux $\varphi_{\alpha_n}(z)$ par la relation (39)

$$f_{\alpha_n}(z) = \varphi_{\alpha_n}(z) + C_{\alpha_n}.$$

Considérons les valeurs C_{α_n}. Deux cas peuvent se présenter :

1° Les valeurs C_{α_n} ont une limite finie γ_0. Extrayons de ces valeurs une suite C_{β_n} tendant vers γ_0. La suite correspondante $\varphi_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers une fonction $\Phi(z)$; par conséquent, la suite $f_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers une fonction $F(z)$ qui est égale à $\Phi(z) + \gamma_0$.

2° Les valeurs C_{α_n} n'ont pour limite que l'infini. Alors on peut extraire de ces valeurs une suite C_{β_n} tendant vers l'infini. Comme la suite $\varphi_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers $\Phi(z)$, on voit par la relation

$$f_{\beta_n}(z) = \varphi_{\beta_n}(z) + C_{\beta_n}$$

que la suite $f_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers l'infini.

7. Nous pouvons encore démontrer le théorème suivant qui généralise le théorème bien connu de M. Montel.

THÉORÈME III. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité, s'annulant chacune p fois au plus et admettant* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est quasi normale d'ordre p au plus dans le cercle unité.*

On peut partir du théorème de M. Montel et l'on arrive immédiatement à la conclusion. Mais nous pouvons aussi donner une démonstration en nous appuyant sur le théorème A sans employer aucun critère connu. Nous supposons d'abord $f(0) \neq 0, 1$ et nous utilisons les notations du théorème I. En raisonnant comme dans ce théorème, de toute suite infinie $f_n(z)$ de la famille, on peut extraire une suite partielle $f_{\alpha_n}(z)$ telle que les fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ ne s'annulent pas et ne prennent pas 1 dans le domaine D.

1° Les valeurs $f_{\alpha_n}(0)$ ont une limite $\gamma_0 \neq 0, 1, \infty$. On peut alors extraire de ces valeurs une suite $f_{\beta_n}(0)$ telle que $\Omega(c_0)$ reste borné et que $f_{\beta_n}(0)$ converge vers γ_0. En appliquant le théorème A aux fonctions de la suite correspondante $f_{\beta_n}(z)$, on obtient comme dans le théorème I, l'inégalité

$$\log |f_{\beta_n}(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(f_{\beta_n}(0), \delta, \eta) + K \log \frac{2}{1-r}\right]$$

valable dans tout le cercle $|z| = r$, avec $0 < \delta \leqq r < 1$.

Cette inégalité montre que les $f_{\beta_n}(z)$ sont bornés dans leur ensemble dans (C_r). On peut conclure comme pour le théorème I que la suite $f_{\beta_n}(z)$ est normale dans le cercle (C_r); elle est donc génératrice d'une suite uniformément convergente.

2° Les $f_{\alpha_n}(0)$ n'ont pour limite que $\gamma_0 = 1$. Extrayons de ces valeurs une suite $f_{\lambda_n}(0)$ tendant vers 1. Considérons la suite $f_{\lambda_n}(z)$; les fonctions $g_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{f_{\lambda_n}(z) - 1}$ sont holomorphes dans D et la suite $g_{\lambda_n}(0)$ tend vers l'infini; on peut donc écrire

$$|f_{\lambda_n}(z) - 1| < \frac{1}{|g_{\lambda_n}(0)| - M(r, \psi_{\lambda_n})}, \qquad \text{où} \quad \psi_{\lambda_n}(z) = g_{\lambda_n}(z) - g_{\lambda_n}(0)$$

et l'on voit que la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers 1 dans D.

3° Dans le cas où $\gamma_0 = 0$ ou le cas où $\gamma_0 = \infty$, on montre d'une façon analogue que la suite $f_{\beta_n}(z)$ est génératrice d'une suite partielle qui converge uniformément vers zéro ou ∞ dans D.

En résumé, on peut conclure que la famille donnée est normale dans D. En raisonnant ensuite comme dans le théorème I, on peut conclure qu'elle est quasi normale dans (C_r), avec A_i et B_j comme points irréguliers possibles. Mais pour un point B_j, s'il est distinct de A_i, alors dans son voisinage les fonctions ne s'annulent pas et en vertu de la proposition II du n° 2, la famille est normale; par suite, ce point est régulier. Donc il y a au plus p points irréguliers $A_i (i = 1, \ldots, p)$ et la famille (f) est quasi normale d'ordre p au plus dans (C_r), par suite dans le cercle unité.

Si $f(0) = 0$, on pose $F = f + \lambda$, avec $\lambda \neq 0, 1$ et si $f(0) = 1$, on pose $F = f + \lambda$, avec $\lambda \neq 0, -1$ pour être ramené au cas précédent.

En particulier, on a le critère :

THÉORÈME III_0. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité, ne s'annulant pas et admettant* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est normale dans le cercle unité.*

Si, en particulier, on suppose que le nombre de points 1 de f est fini, on retrouve un théorème dû à M. Montel.

8. Les critères analogues à tous ceux qui précèdent peuvent s'obtenir immédiatement pour un domaine connexe quelconque, au moyen d'un théorème de M. Montel, d'après lequel une famille de fonctions est normale dans un domaine D, si elle est normale en chaque point de D.

III. — Critères de normalité ou de quasi-normalité pour une famille de fonctions méromorphes.

9. Les résultats que nous avons obtenus pour des familles de fonctions holomorphes s'étendent aisément au cas des fonctions méromorphes. Donnons d'abord une définition.

Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité; nous appelons aussi *famille réduite* de (f) toute famille (φ) dont les fonctions $\varphi(z)$ sont obtenues en remplaçant $f(0)$ par un nombre fixe Λ.

THÉORÈME I'. — *Soit une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité, ayant dans le voisinage de l'origine un développement de même forme que* (38); *si elles ne prennent pas une valeur α, prennent chacune une valeur $\beta \neq \alpha$ au plus p fois, et admettent une valeur $\gamma \neq \alpha$, β comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, la famille est normale dans le cercle unité.*

Nous pouvons supposer $\Lambda \neq \alpha, \beta, \gamma$ et débarrasser la restriction après comme dans le théorème I. Posons

$$F = \frac{f-\beta}{f-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}. \tag{40}$$

Les fonctions F sont holomorphes dans le cercle unité et ne s'y annulent chacune que p fois au plus. Je dis, de plus, qu'elles admettent 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. En effet, d'abord l'identité (40) est de la forme

$$F = \frac{Af+B}{A'f+B'}, \tag{41}$$

avec

$$AB' - BA' = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \neq 0,$$

on sait alors que $T(r, F)$ et $T(r, F)$ sont de même ordre. Ensuite les $F - 1$ ont les mêmes zéros que les $f-\gamma$, donc les $N\left(r, \frac{1}{F-1}\right)$ sont de même ordre que les $N\left(r, \frac{1}{f-\gamma}\right)$. Par conséquent, 1 est bien une valeur exceptionnelle de Picard-Borel pour les fonctions F.

Si l'on remarque encore que $F(0) \neq 1$, on peut alors conclure d'après le théorème I que la famille (F) de fonctions $F(z)$ est normale dans le cercle unité.

Or la convergence uniforme d'une suite infinie quelconque des fonctions F dans le cercle unité entraîne celle de la suite correspondante des fonctions f, donc la normalité de la famille (F) entraîne celle de la famille (f).

THÉORÈME II'. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité, telle que les fonctions $\varphi(z)$ de l'une de ses familles réduites ne prennent pas une valeur α, prennent chacune une valeur $\beta = \alpha$ au plus p fois et admettent une valeur $\gamma \neq \alpha$, β comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est normale dans le cercle unité.*

Pour le démontrer, il suffit de procéder comme pour le théorème II.

THÉORÈME III'. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité, ne prennent pas une valeur α, prennent au plus p fois une valeur $\beta \neq \alpha$, et admettent une valeur $\gamma \neq \alpha$, β comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel est quasi normale d'ordre p au plus dans le cercle unité.*

On fait la transformation (40), et l'on voit que les fonctions F qui sont holomorphes s'annulent chacune p fois au plus et admettent 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. En vertu du théorème III, elles forment une famille quasi normale d'ordre p et l'on conclut comme dans le théorème I' que la quasi-normalité de (F) entraîne celle de (f).

En particulier, si les f ne prennent pas aussi β, la famille est normale.

10. On obtient, comme dans le cas des fonctions holomorphes, des théorèmes analogues pour un domaine connexe quelconque.

IV. — Extensions du théorème de Schottky et du théorème de Landau.

11. On a déjà le théorème A qui peut être considéré comme une extension du théorème de Schottky. Mais nous allons encore trouver, au lieu de (25), des inégalités plus précises dans lesquelles les quantités δ et δ_ν ne figurent pas. Nous commençons par démontrer les lemmes suivants à l'aide du théorème de Boutroux-Cartan [10] :

LEMME I*a*. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; on*

---

[10] *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.*, 3e série, t. 45, 1928.

désigne par $a_\nu[\nu=1, \ldots, n(r, 0)]$ *ses zéros compris dans le cercle* $|z|=r$. *Si les cercles d'exclusion* (Γ) *relatifs à l'inégalité* $\Pi|z-a_\nu|>h^{n(r,0)}$ *dont la somme des rayons est égale à* $2eh$, *se trouvent entièrement à l'intérieur de la circonférence* $|z|=r$, *on a pour* $0<r<\rho<1$

$$(42)\qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)<\mathrm{A}_k n(r, 0)\log\frac{1}{h}+\mathrm{B}_k\log\frac{1}{\rho-r}+\mathrm{C}_k\overset{+}{\log}\mathrm{V}(\rho, f),$$

où h *est un nombre positif arbitraire, mais dépendant de* r *et* A_k, B_k, C_k *sont des constantes numériques.*

Reprenons l'inégalité (12) et cherchons une borne de

$$\mathrm{E}=\sum\frac{1}{|z-a_\nu|^k}\qquad[\nu=1, \ldots, n(\mathrm{R}, 0)].$$

En prenant le $\overset{+}{\log}$ des deux membres, on a

$$\overset{+}{\log}\mathrm{E}\leqq k\sum\log\frac{2}{|z-a_\nu|}+\log n(\mathrm{R}, 0).$$

D'après le théorème de Boutroux-Cartan, on obtient immédiatement, pour tout point z extérieur aux cercles dont la somme des rayons est égale à $2eh$,

$$(43)\qquad \log\mathrm{E}\leqq k\,n(\mathrm{R}, 0)\log\frac{1}{h}+\log n(\mathrm{R}, 0).$$

En désignant pour le moment par $\log\overline{\mathrm{E}}(\mathrm{R})$ le second membre de cette inégalité et en procédant comme dans le lemme I, on trouve

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|<\mathrm{A}'_k[\log\overline{\mathrm{E}}(r)+\log n(r, 0)]+\mathrm{B}'_k\log\frac{1}{\rho-r}+\mathrm{C}'_k\overset{+}{\log}\mathrm{V}(\rho, f)$$

dès que l'on prend $h<1$. Il en résulte immédiatement l'inégalité (42).

Lemme IIa. — *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans le cercle unité; on conserve les notations du lemme précédent et l'on fait la même hypothèse sur les cercles d'exclusion* (Γ). *En supposant* $f(0)\neq 0$, *on a, ou bien pour tout point* z *intérieur au cercle* $|z|=r$,

$$(44)\qquad |f(z)|<|f(0)|+\mathrm{M}_k,$$

ou bien pour $0\leqq r_0\leqq r<\rho<1$

$$(45)\qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right)<\mathrm{N}(r, 0)+\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\omega_0(r)+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\overset{+}{\log}\mathrm{V}(\rho, f)\right],$$

où

$$\omega_0(r)=\log|f(0)|+n(r, 0)\log\frac{1}{h}$$

et $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

La première partie du lemme se démontre comme dans le lemme II. Pour le premier cas de la seconde partie, on trouve, en vertu du lemme précédent, l'inégalité

$$(46) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \mathrm{N}(r, 0) + \mathrm{A}_k \omega_0(r) + \mathrm{B}_k \log \frac{1}{\rho - r} + \mathrm{C}_k \overset{+}{\log} \mathrm{V}(\rho, f)$$

qui entre évidemment dans (45).

Dans le second cas, nous avons encore l'inégalité (19). Pour le dernier terme du crochet de cette inégalité, on a pour tout point z extérieur aux (Γ) et intérieur au cercle $|z| < \mathrm{R}$,

$$(47) \qquad \sum_\nu \log \left| \frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z}{z(z - a_\nu)} \right| < \log \prod_\nu \left| \frac{2}{|z - a_\nu|} \right| \qquad [\nu = 1, \ldots, n(\mathrm{R}, 0)]$$

$$< n(\mathrm{R}, 0) \log \frac{1}{h} + n(\mathrm{R}, 0) \log 2.$$

En tenant compte de ce résultat et en appliquant le lemme Ia à $m\left(\mathrm{R}, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, le même raisonnement que dans le lemme II nous conduit à la conclusion.

Théorème a. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie par le développement (24) dans le cercle unité; on suppose qu'elle s'y annule seulement p fois et y admette 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. Si en désignant par $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ ses zéros, les cercles d'exclusion (Γ) relatifs à l'inégalité*

$$\prod_\nu |z - h_\nu| > h^p \qquad (\nu = 1, \ldots, p),$$

dont la somme des rayons est égale à $2eh$, sont compris dans un cercle de centre O et de rayon $\lambda (\lambda < 1)$, alors en supposant $c_0 \neq 1$, on a, pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ avec $\lambda < r < 1$,

$$(48) \qquad \log |f(z)| < \frac{1}{(1 - r)^3} \left[\mathrm{H} \left(\Omega(c_0) + \log \frac{1}{r} + p \log \frac{1}{h} \right) + \mathrm{K} \log \frac{2}{1 - r} \right],$$

où h est un nombre positif arbitraire, mais dépendant de λ et de r; et H, K *sont numériques.*

Nous trouvons comme dans le théorème A l'inégalité (28). Pour limiter son second membre, nous appliquons le lemme IIa à $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$. Dans la première alternative, l'inégalité (48) est déjà, *a fortiori*, vérifiée; dans la seconde, en désignant par $\mathrm{S}_1(r)$ le dernier terme de (45), on a

$$(49) \qquad m(r, f) < \mathrm{N}(r, 0) + \mathrm{N}(r, 1) + \mathrm{S}_1(r) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) + \big| \log |c_0 - 1| \big| + 8 \log 2.$$

Majorons le second membre de cette inégalité. Pour $N(r, 0)$ comme pour $N(r, 1)$, nous utilisons la borne de (30); et pour les deux termes qui suivent $S_1(r)$, nous appliquons le lemme de M. R. Nevanlinna. Puis $S_1(r)$ peut s'écrire

$$S_1(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_0(r)\right) + \beta' \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma' \overset{+}{\log} m(\rho, r)\right].$$

Alors l'inégalité (48) prend la forme

$$m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h}\right) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]. \tag{50}$$

Le coefficient de α_1 est une fonction positive de r; on peut appliquer à cette inégalité le lemme que nous avons donné récemment ([11]) et il vient pour $0 < \lambda \leqq r_0 \leqq r < 1$

$$m(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h}\right) + K' \log\frac{2}{1 - r}\right], \tag{51}$$

inégalité qui sera valable pour $\lambda < r < 1$, si l'on renforce éventuellement les coefficients H′ et K′. Ce qui donne immédiate l'inégalité (48).

Remarque. — On peut comparer ce théorème avec celui de M. Valiron concernant une fonction holomorphe dans le cercle unité, qui y prend au plus n fois les valeurs 0 et 1 et qui vérifie une condition complémentaire ([12]).

12. En faisant une hypothèse complémentaire, on peut obtenir une limitation valable pour toute valeur de r, sauf $r = 0$ et sans intervention d'aucune valeur arbitraire.

THÉORÈME α. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie par (24) dans le cercle unité; on suppose que $c_0 \neq 1$ et que c_h soit en module égal ou supérieur à un nombre positif λ. Si $f(z)$ s'annule seulement p fois et admet comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, on a pour $0 < r < 1$*

$$\log M(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K \log\frac{2}{1 - r}\right], \tag{52}$$

où $\Omega(c_0)$ a la signification donnée dans le théorème A *et* H, K *sont des constantes numériques.*

Nous avons encore (28). En appliquant au premier terme de $Q(r)$ la formule de Jensen, on trouve

$$m(r, f) < N(r, 0) + N(r, 1) + S(r), \tag{53}$$

avec

$$S(r) = 2m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) + \log\left|\frac{c_0}{hc_h}\right| + \left|\log|c_0 - 1|\right| + 8\log 2.$$

([11]) HIONG, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1628-1630.
([12]) VALIRON, *Mém. Sc. Math.*, fasc. LXXXIX, p. 15-17.

Si l'on majore le second membre de l'inégalité (53) comme on l'a fait pour celui de (49) dans le théorème précédent, il vient pour $0 < r_0 \leqq r < \rho < 1$

$$(54) \quad m(r, f) < \frac{1}{\rho - r}\left[\alpha_1\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right].$$

D'après le lemme que nous venons d'appliquer à (50), nous obtenons alors pour $0 < r_0 < r < 1$ l'inégalité

$$(55) \qquad m(r, f) < \frac{1}{1 - r}\left[H_1\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + K_1 \log\frac{2}{1 - r}\right];$$

elle devient valable pour $0 < r < 1$, si l'on remplace au besoin les coefficients H_1, K_1 par des quantités plus grandes.

Maintenant en vertu de l'hypothèse, on a $|c_h| \geqq \lambda$; et l'inégalité (55) devient

$$(56) \qquad m(r, f) < \frac{1}{1 - r}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K' \log\frac{2}{1 - r}\right].$$

De cette inégalité, on déduit tout de suite (52).

Remarque. — Pour majorer $N(r, 0)$, on peut encore utiliser le théorème de Boutroux-Cartan, on peut aussi remarquer que

$$N(r, 0) = \sum_{\nu=1}^{p} \log\frac{r}{|a_\nu|} < p \log\frac{1}{r_1}, \qquad \text{avec} \quad r_1 = |a_1|$$

et écrire (52) en mettant p en évidence

$$(52') \qquad \log M(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K \log\frac{2}{1 - r}\right] + p \log\frac{1}{r_1}.$$

13. Cas des fonctions méromorphes. — On peut obtenir des inégalités analogues pour les fonctions méromorphes dans le cercle unité. Cherchons d'abord à établir un théorème analogue au théorème A. Pour cela, nous commençons par démontrer les lemmes suivants :

Lemme I'. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité. Si l'on désigne par $a_\nu [\nu = 1, \ldots, n(r, 0)]$ et $b_\mu [\mu = 1, \ldots, n(r, \infty)]$ ses zéros et ses pôles compris dans le cercle $|z| = r$, respectivement et l'on décrit de chaque a_ν comme centre un cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ_ν et de chaque b_μ comme centre un cercle (σ_μ) de rayon arbitrairement petit τ_μ, alors en supposant $f(0) = c_0 \neq 0, \infty$, on a pour $0 \leqq r < \rho < 1$*

$$(57) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k \Omega_1(c_0, \delta_\nu, \tau_\mu) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} T(\rho, f),$$

où

$$\Omega_1(c_0, \delta_\nu, \tau_\mu) = \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \sum_\nu \frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}$$

$$[\nu = 1, \ldots, n(r, 0);\ \mu(1, \ldots, n(r, \infty))]$$

et A_k, B_k, C_k, *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Prenons la formule de Poisson-Jensen; en procédant comme dans le théorème I, on trouve

$$(58)\qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A'_k\left(\sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \frac{1}{\tau_\mu}\right) + B'_k \log\frac{1}{\rho - r} + C'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f).$$

En vertu de la formule de Jensen, on a

$$V(\rho, f) = m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right) < 2T(\rho, f) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right|$$

et

$$(59)\qquad \overset{+}{\log} V(\rho, f) < \overset{+}{\log} T(\rho, f) + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + 2\log 2,$$

il vient de l'inégalité (57).

En particulier, on a pour $0 \leqq r < \rho < 1$

$$(60)\qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A_1\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}\right) + B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} T(\rho, f).$$

Remarque. — Pour le cas où $k = 1$, le lemme de M. R. Nevanlinna fournit une inégalité de même nature sans l'intervention des δ_ν et τ_μ. Mais r ne peut pas s'annuler.

Lemme II'. — *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe dans le cercle unité; en conservant les notations du lemme* I' *et en supposant* $f(0) \neq 0, \infty$, *on a ou bien, pour tout point* z *extérieur aux* (γ_ν), (δ_μ) *et intérieur au cercle* $|z| = r$

$$(61)\qquad |f(z)| < |f(0)| + M_k,$$

ou bien, pour $0 \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$

$$(62)\qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \Omega_1(c_\nu, \delta_\nu, \tau_\mu) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} T(\rho, f)\right],$$

où

$$\Omega_1(c_0, \delta_\nu, \tau_\mu) = \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}, \qquad \text{avec} \quad c_0 = f(0)$$

et M_k, α_k, β_k, γ_k *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Désignons par (Cr) le cercle $|z|=r$ et par D le domaine limité par (Cr), (γ_ν) et (σ_μ); si $|f^{(k)}(z)|<1$ pour tout point z de D, on démontre comme dans le lemme I qu'on a l'inégalité (61).

Supposons donc qu'il existe dans D un point z_1 tel que $|f^{(k)}(z_1)|\geqq 1$. Il y a deux cas à distinguer comme dans le lemme II :

1° On a $z_1=0$. Nous appliquons la formule de Jensen et nous obtenons

$$(63)\qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log|f(0)|;$$

comme on sait que

$$\mathrm{N}(r, f') < \mathrm{N}(r, f) + \overline{\mathrm{N}}(r, f) < 2\mathrm{N}(r, f)$$

et par suite

$$\mathrm{N}(r, f^{(k)}) < 2^k \mathrm{N}(r, f),$$

on a

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{N}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \mathrm{N}(r, f^{(k)}) \\ &\qquad < \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + 2^k \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu} \\ &\qquad [\nu=1, \ldots, n(r, 0);\ \mu=1, \ldots, n(r, \infty)] \end{aligned}\right.$$

pour les δ_ν et τ_μ suffisamment petits.

En appliquant (57) au premier terme de l'inégalité (63) et en remplaçant son second terme par la borne donnée par (64), il vient

$$(65)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \mathrm{A}_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \Sigma\log\frac{1}{\delta_\nu} + \Sigma\log\frac{1}{\tau_\mu}\right) + \mathrm{B}_k \log\frac{1}{\rho-r} + \mathrm{C}_k \overset{+}{\log}\mathrm{T}(\rho, f),$$

inégalité qui entre évidemment dans (57).

2° $z_1\neq 0$. Alors $f^{(k)}(z)\geqq 1$ et nous appliquons la relation (3) à la fonction $\dfrac{f^{(k)}(z)}{f(z)}$ pour le point z_1, il vient en posant $|z_1|=r$,

$$m\left(\mathrm{R}, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{4}{\mathrm{R}-r_1} m\left(\mathrm{R}, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{2}{\mathrm{R}-r}\left[\log\left|\frac{f(z_1)}{f^{(k)}(z_1)}\right| + \sum_\nu \log\frac{2}{\delta_\nu} + 2^k\sum_\mu \log\frac{1}{\tau_u}\right]$$
$$[\nu=1, \ldots, n(\mathrm{R}, 0);\ \mu=1, \ldots, n(\mathrm{R}, \infty)].$$

En raisonnant comme dans le lemme II, on trouve l'inégalité,

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha'_k\left(\sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_u}\right) + \beta'_k \log\frac{1}{\rho-r} + \gamma'_k \overset{+}{\log}\mathrm{V}(\rho, f)\right]$$
$$[\nu=1, \ldots, n(r, 0);\ \mu=1, \ldots, n(r, \infty)]$$

qui peut se mettre encore d'après (59) sous la forme

$$(66)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha''_k\left(\sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}\right) + \beta''_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma''_k \log T(\rho, f)\right]$$

valable pour $0 \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$. Cette inégalité entre également dans (57).

Théorème A'. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, ayant dans le voisinage de l'origine un développement en série de forme*

$$(24')\qquad f(z) = c_0 + c_h z^h + \ldots \qquad (c_0,\ c_h \neq 0,\ \infty);$$

On désigne respectivement par a_ν et b_μ, ses zéros et ses pôles, puis par (γ_ν) et (σ_μ) les cercles de centres a_ν et b_μ de rayons arbitrairement petits δ_ν et τ_μ. Si dans le cercle unité $f(z)$ ne prend la valeur 0 que p fois, la valeur ∞ que q fois $(\nu = 1, \ldots, p;\ \mu = 1, \ldots, q)$ et admet 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, alors, en supposant $c_0 \neq 1$, on a, pour tout point z extérieur aux (γ_ν) (σ_μ) et tel que $0 < \delta \leqq |z| \leqq r < 1$, l'inégalité

$$(67)\quad \log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + K \log\frac{2}{1-r}\right] \qquad (\nu = 1, \ldots, p;\ \mu = 1, \ldots, q),$$

où

$$\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) = \Omega(c_0) + \log\frac{1}{\delta} + \sum_{\nu=1}^{p} \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_{\mu=1}^{q} \log\frac{1}{\tau_\mu},$$

et H, K *sont des constantes numériques.*

On déduit, des inégalités de M. R. Nevanlinna l'inégalité

$$(68)\quad T(r) < N(r, 1) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f-1}\right) + \big|\log|c_0 - 1|\big| + 8\log 2.$$

Pour majorer $N(r, 1)$, on a une inégalité analogue à (30). Appliquons le lemme II' au second terme du second membre, et le lemme de M. R. Nevanlinna, aux deux termes suivants; on trouve une inégalité de la forme

$$(69)\qquad T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1 \Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} T(\rho)\right]$$

pour $0 \leqq \delta \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$.

Alors, d'après le lemme B, il vient

$$(70)\qquad T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[H_1 \Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + K_1 \log\frac{2}{1-r}\right].$$

Cette inégalité établie pour $r = r_0$ reste encore valable pour $\delta \leqq r < r_0$, si l'on renforce éventuellement les coefficients.

Posons maintenant

$$(71)\qquad g(z) = f(z) \prod \frac{z - b_k}{1 - \bar{b}_k z},$$

b_k étant les pôles de $f(z)$. $g(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle unité et $|g(z)| < |f(z)|$ pour $|z| < 1$. Il s'ensuit que $T(r, g) < T(r, f)$ et

$$m(r, g) < \frac{1}{(1-r)^2}\left[H_2\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + K_2 \log\frac{2}{1-r}\right]. \tag{72}$$

En vertu de (37), on a

$$\log M(r, g) < \frac{R+r}{R-r} m(R, g);$$

et l'on trouve

$$\log M(r, g) < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H'\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + K' \log\frac{2}{1-r}\right]. \tag{73}$$

Désignons comme plus haut par (Cr) et (γ) les cercles $|z| = r$ et $|z| = \delta$ respectivement, puis par Δ le domaine limité par les circonférences (Cr), (γ), (γ_ν) et (σ_μ); pour tout point z de Δ, on peut écrire

$$|f(z)| < |g(z)| \prod_\mu \frac{2}{(z - b_\mu)} \leqq |g(z)| \prod_\mu \frac{2}{\tau_\mu}, \tag{74}$$

$$\log|f(z)| < \log|g(z)| + \sum_\mu^q \log\frac{1}{\tau_\mu} + q\log 2.$$

Donc on a bien une inégalité de la forme (67).

14. Les lemmes I_a et II_a s'étendent immédiatement au cas des fonctions méromorphes et on les a énoncés :

LEMME I$'a$. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité et l'on utilise les mêmes notations que plus haut; si les cercles d'exclusion (Γ) et (Σ) relatifs aux inégalités*

$$\Pi|z - a_\nu| > h^{n(r,0)} \qquad \text{et} \qquad \Pi(z - b_\mu) > l^{n(k,\infty)}$$

dont les sommes des rayons sont respectivement égales à $2eh$ et $2el$, se trouvent dans l'intérieur du cercle $|z| < r$, on a pour $0 \leqq r < \rho < 1$

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k\left[n(r, 0)\log\frac{1}{h} + n(r, \infty)\log\frac{1}{l}\right] + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log T(\rho, f), \tag{75}$$

où h et l sont des nombres positifs arbitraires, mais dépendant de r; et A_k B_k, C_k sont des constantes numériques.

LEMME II$'a$. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, on conserve les notations précédentes et l'on fait la même hypothèse que dans le lemme* I$'a$ *sur les cercles d'exclusion. En supposant $f(0) \neq 0, \infty$, on a ou bien, pour tout point z extérieur aux (Γ), (Σ) et tel que $(z) \leqq r$ une inégalité de forme (43), ou bien pour $0 \leqq r_0 \leqq r < \rho < 1$ l'inégalité*

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < N(r, 0) + N(r, 1) + \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \bar{\omega}_0(r) + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} T(\rho, f)\right], \tag{76}$$

où $\omega_0(r) = \log|f(0)| + n(r, 0)\log\frac{1}{h} + n(r, \infty)\log\frac{1}{l}$ *et* α_k, β_k, γ_k *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Au moyen de ces deux lemmes, on peut établir le théorème :

THÉORÈME a'. — *Soit une fonction méromorphe dans le cercle unité ayant* (24') *pour développement dans le voisinage de* 0; *on suppose que dans le cercle unité, elle ne prenne* 0 *que* p *fois,* ∞ *que* q *fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. Si, suivant les notations précédentes, les cercles d'exclusion* (Γ) *et* (Σ) *sont compris dans le cercle* $|z| = \lambda (\lambda < 1)$, *alors, en supposant* $c_0 \neq 1$, *on a, pour tout point* z *extérieur aux* (Γ), (Σ) *et tel que* $0 < |z| \leqq r < 1$ *et* $\lambda < r < 1$, *l'inégalité.*

$$(77)\quad \log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l} + K\log\frac{2}{1-r}\right] + q\log\frac{2}{l},$$

où h *et* l *sont des nombres positifs arbitraires, mais dépendant de* λ, *et* H, K *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Nous avons, comme dans le théorème A', l'inégalité (68) et nous appliquons le lemme II'a au terme $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$. Il suffit de considérer la seconde alternative; en procédant de la même façon que pour le théorème a et en prenant h et k de façon que les (Γ) et (Σ) soient compris dans les cercles $|z| = \lambda$, on est conduit à l'inégalité

$$T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1(\Omega(c_0) + H_0(r)) + \beta_1\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right],$$
$$(0 < \lambda < r < \rho < 1),$$

où l'on pose

$$H_0(r) = \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l}.$$

En vertu de (57) cette inégalité s'écrit encore

$$(78)\qquad T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'(\Omega'(c_0) + H(r)) + \beta'\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma'\overset{+}{\log} T(\rho)\right].$$

D'après le lemme appliqué à (48) du théorème a, nous obtenons pour $\lambda < r < 1$,

$$(79)\qquad T(r) < \frac{1}{(1-r)^2}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + \rho\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l}\right) + K'\log\frac{2}{1-r}\right].$$

Maintenant considérons la fonction holomorphe $g(z)$ définie par (71). En vertu de (74), on a pour tout point z de Δ

$$(80)\qquad \log|f(z)| < \log|g(z)| + \log\prod\frac{2}{|z - b_\mu|}$$

et d'après le théorème de Boutroux-Cartan, nous avons pour le dernier terme du second membre de (80)

$$(81)\qquad \log \prod \frac{2}{|z-b_\mu|} < q \log \frac{2}{h}$$

pour tout point z extérieur aux cercles (Σ).

Or, nous avons vu que $m(r, g) < T(r, f)$ et

$$\log M(r, g) < \frac{2}{R-r} m(R, g) < \frac{2}{R-r} T(R, f),$$

donc, en posant $R - r = \frac{1-r}{2}$, il vient *a fortiori*

$$(82)\quad \log|g(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + \rho\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l}\right) + K\log\frac{2}{1-r}\right].$$

Des inégalités (80), (81) et (82), on déduit alors (77).

15. Nous allons maintenant établir une proposition analogue au théorème α :

THÉORÈME α'. — *Soit une fonction méromorphe dans le cercle unité ayant dans le voisinage de l'origine un développement en série entière de forme* (24'); *on suppose que* $c_0 \neq 1$ *et* c_h *est en module égal ou supérieur à un nombre positif* λ. *Si elle ne prend* 0 *que* p *fois et* ∞ *que* q *fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, on a pour tout point* z *extérieur aux* (σ_μ) *et tel que* $\delta \leq |z| < 1$

$$(83)\qquad \log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^2}\left[H\Omega(c_0, \delta, \tau_\mu) + K\log\frac{2}{1-r}\right],$$

où $\Omega(c_0, \delta, \tau_\mu) = \Omega(c_0) + \log\frac{1}{\delta} + \sum_\mu^q \log\frac{1}{\tau_\mu}$; *et* H, K *sont des constantes numériques.*

Prenons l'inégalité (68) et appliquons au terme $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ la forme de Jensen; il vient

$$(84)\quad T(r) < N(r, 1) + 2m\left(r + \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \log\left|\frac{c_0}{hc_h}\right| + \log|c_0 - 1| + 8\log 2.$$

Majorons le premier terme du second membre comme plus haut et les deux termes suivants au moyen du lemme de M. R. Nevanlinna avec l'inégalité mise sous la forme :

$$(85)\qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A_1\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + B_1\log\frac{1}{\rho - r} + C_1\log T(\rho, f);$$

il vient ainsi une égalité qu'on peut écrire

$$T(r) < \frac{1}{\rho - r}\left[\alpha_1\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + \beta_1\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1\overset{+}{\log} T(\rho)\right] \qquad (r < \rho < 1).$$

Si nous appliquons le lemme utilisé dans le théorème a, nous obtenons :

$$(86)\qquad T(r) < \frac{1}{1-r}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\left|\frac{1}{r}\right|\right) + K'\log\frac{2}{1-r}\right]$$

qui est valable pour $0 < r < 1$ en renforçant éventuellement les coefficients.

En vertu de l'hypothèse, on a donc pour $0 < r < 1$

$$(87)\qquad T(r) < \frac{1}{1-r}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K\log\frac{2}{1-r}\right].$$

Considérons maintenant la fonction holomorphe $g(z)$ définie par (71). De (74), on a pour tout point z du domaine Δ

$$\log|f(z)| < \overset{+}{\log}|g(z)| + \overset{+}{\log}\prod^{q}\frac{2}{(z-b_\mu)}.$$

Si l'on applique le théorème de Boutroux-Cartan au dernier terme du second membre en prenant un nombre positif h assez petit, on a

$$\log\prod\left|\frac{2}{z-b_\mu}\right| < q\log\frac{2}{h}$$

pour tout point à l'extérieur des cercles (Σ), dont la somme des rayons est au plus égale à h.

En raisonnant comme pour la dernière partie de la démonstration pour le théorème a, on trouve pour tout point z extérieur aux cercles d'exclusion

$$\log|f(z)| < \frac{1}{1-r}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K\log\frac{2}{1-r}\right] + q\log\frac{2}{h}.$$

16. On obtient comme extension du théorème de Landau le théorème suivant :

Théorème L. — *Soit une fonction holomorphe définie par*

$$(88)\qquad f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots \qquad (c_0,\ c_1 \neq 0)$$

dans le cercle $|z| < R$; *si elle s'annule* p *fois au plus et admet une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, on a, en supposant* $c_0 \neq 1$,

$$(89)\qquad |c_1|R < K e^{H\Omega(c_0, c_1)}, \qquad \Omega(c_0, c_1) = \Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right|,$$

H, K *sont des constantes numériques.*

Posons $z = R\zeta$; les cercles $|z| < R$ et $|z| < r(< R)$ se transforment en cercle unité et en un certain cercle $|\zeta| < \rho\,(< 1)$ respectivement; et l'on a

$$F(\zeta) = f(Rz) = c_0 + c_1 Rz + \ldots.$$

Cette fonction $F(\zeta)$ est holomorphe dans le cercle unité; de plus elle ne s'annule que p fois et admet 1 comme valeur exceptionnelle. L'inégalité (28) lui est donc valable et l'on en déduit, en appliquant à $m\left(r, \frac{F'}{F}\right)$ la formule de Jensen, une inégalité comme (54) ou

$$m(r, F) < A_1\left[\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right] + B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} m(\rho, F).$$

D'après le lemme A, il vient

$$m(r, F) < H_1\left[\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right] + K \log\frac{2}{1 - r}. \tag{90}$$

D'autre part, le théorème de Cauchy et l'inégalité (37) donnent

$$|F'(0)| < \frac{1}{3} M\left(\frac{1}{3}, F\right) \quad \text{et} \quad \log M\left(\frac{1}{3}, F\right) < 3m\left(\frac{2}{3}, F\right),$$

où l'on peut substituer à δ la valeur $\frac{1}{3}$.

Donc en posant $\Omega(c_0, c_1) = \Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right|$,

$$|f'(0)| R < K e^{H\Omega(c_0, c_1)}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Cas où un est une valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna et cas plus général.

I. — Limitations de $M(r, f)$ et critères de normalité ou de quasi-normalité.

17. Pour une fonction admettant 1 comme valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna, nous allons démontrer le théorème :

Théorème B. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par un développement de forme* (24). *Si $f(z)$ ne s'annule que p fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna avec un défaut $\delta(1) \geqq l > 0$, alors en supposant $c \neq 1$ et en utilisant les mêmes notations que dans le théorème* A, *on a pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ avec $0 < \delta \leqq r < 1$, l'inégalité*

$$\log|f(z)| < \frac{1}{1 - r}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right], \tag{91}$$

où $\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu)$ a la même signification que dans (25) *et* H, K *sont numériques.*

De l'inégalité (28), on déduit

$$1 - \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{N(r, 1)}{m(r, f)} \leqq \underline{\lim_{r \to 1}} \frac{Q(r)}{m(r, f)}.$$

D'après l'hypothèse, le premier membre qui représente le défaut $\delta(1)$ est plus grand que l; donc si l'on prend r_0 suffisamment grand, on a pour $r \geqq r_0$

$$(92) \qquad m(r, f) < k Q(r), \qquad k = \frac{1}{l}.$$

Il suffit de majorer $Q(r)$. En procédant comme dans le théorème A, on trouve une inégalité de forme (35). La démonstration se poursuit alors de la même façon que celle du théorème A.

En particulier, si f ne s'annule pas, les δ_ν disparaissent et l'inégalité (91) se simplifie.

18. Le théorème B fournit des critères de normalité ou de quasi-normalité par la considération d'une valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna, qui sont analogues aux théorèmes I, II et III ainsi qu'aux théorèmes I′, II′ et III′.

Enfin on peut obtenir de la même façon que dans le cas précédent des extensions du théorème de Schottky et de celui de Landau.

19. La méthode que nous avons utilisée dans ce qui précède, nous permet d'obtenir des résultats analogues pour un cas plus général. C'est celui des fonctions holomorphes dans le cercle unité, qui ne s'y annulent que p fois et qui y vérifient l'inégalité

$$(\alpha) \qquad N(r, 1) \leqq \frac{1}{(1-r)^2}\left[a\omega_0 + b\log\frac{1}{1-r} + c\,\overset{+}{\log}\, m(r, f)\right]$$

pour $0 \leqq r_0 < r < 1$, ω_0 pouvant contenir linéairement $\overset{+}{\log}|f(0)|$, $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$ et $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)-1}\right|$. Par exemple, une fonction holomorphe d'ordre égal ou inférieur à 2 dans le cercle unité, qui s'annule seulement p fois appartient à cette catégorie de fonctions, car en vertu du premier théorème fondamental de M. R. Nevanlinna on a

$$N(r, 1) < m(r, f) + \overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)-1}\right| + \log 2.$$

On peut établir dans ce cas le théorème suivant :

Théorème C. — *Soit une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par le développement* (24); *si dans le cercle, ses zéros sont en nombre fini et ses points uns vérifient l'inégalité* (α), *alors, en supposant que* $c_0 \neq 1$ *et en conservant les notations déjà utilisées, on a, pour tout point* z *intérieur au cercle* $|z| = r$ *avec* $0 < \delta \leqq r < 1$, *l'inégalité*

$$\log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K\log\frac{2}{1-r}\right],$$

où $\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu)$ *a toujours la même signification que dans le théorème* A *et* H, K, *sont numériques.*

Nous partons encore de l'inégalité (28). En vertu de l'hypothèse on a *a fortiori* pour $r_0 \leqq r < \rho < 1$

$$N(r, 1) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[a\omega_0 + b \log\frac{1}{\rho - r} + c \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

ou en vertu de (32)

$$N(r, 1) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[a'\omega_0 + b' \log\frac{1}{\rho - r} + c' \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right],$$

inégalité que nous utiliserons pour borner le premier terme du second membre de (28). En majorant les autres termes comme dans le théorème A, nous pourrons mettre (28) sous la forme (35). Alors le raisonnement qu'on a fait dans la dernière partie de la démonstration pour ce théorème nous conduira à la conclusion.

20. En s'appuyant sur le théorème C, on trouvera des critères analogues à tous ceux obtenus dans le cas où *un* est une valeur exceptionnelle de Picard-Borel.

Et comme extensions du théorème de Schottky et celui de Landau, on pourra également obtenir des théorèmes analogues à ceux établis dans ce cas.