ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DANIEL BARLET

JON MAGNUSSON

Intégration de classes de cohomologie méromorphes et diviseurs d'incidence

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 31, nº 6 (1998), p. 811-842

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_6_811_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 31, 1998, p. 811 à 842.

INTÉGRATION DE CLASSES DE COHOMOLOGIE MÉROMORPHES ET DIVISEURS D'INCIDENCE

PAR DANIEL BARLET ET JON MAGNUSSON

À la mémoire de Louis Doustaing

RÉSUMÉ. – Le premier objectif de cet article est de généraliser, en géométrie complexe locale, l'idée centrale de la construction de Chow et Van der Waerden : associer à un cycle son « diviseur d'incidence » avec une famille analytique de cycles « de référence » (les variétés linéaires de dimension convenables dans le cas de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$).

Sous des hypothèses très générales, nous associons ainsi à une intersection complète locale un diviseur de Cartier de l'espace de paramètre S. Il est à noter que nous ne faisons pas d'hypothèse sur les singularités de S.

Le second objectif est d'étudier les singularités des fonctions obtenues par intégration de classes de cohomologie méromorphes sur une famille analytique de cycles. Notre résultat dans ce cadre permet de contrôler l'ordre des pôles des fonctions méromorphes ainsi obtenues sur l'espace de paramètre par l'ordre du pôle de la classe de cohomologie considérée. © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – The first goal of this paper is to generalize in local complex geometry the main idea in Chow and Van der Waerden' construction: associating the "incidence divisor" of a cycle with a given analytic family of cycles (the linear projective varieties of suitable dimension in the case of $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$).

Under very general hypotheses we associate a Cartier divisor on the parameter space, in which arbitrary singularities are allowed to a local complete intersection.

The second goal is to study the singularities of functions obtained by integration of meromorphic cohomology classes on an analytic family of cycles. Our result enables us to control the pole order of the meromorphic functions on the parameter space from the pole order of the given cohomology class. © Elsevier, Paris

0. Introduction

La construction classique de la variété de Chow (voir [C-VdW]) de l'espace projectif $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ consiste à associer à un n-cycle X de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ le diviseur de la grassmannienne $G_{N-n-1,N}(\mathbb{C})$ des $(N-n-1)$-plans Π de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ défini par la condition d'incidence

$$|X| \cap \Pi \neq \emptyset.$$

Un des buts de cet article est de montrer que cette construction se généralise très largement en géométrie analytique complexe « locale ». Nous montrons que si Z est un espace complexe quelconque, et que si $Y \subset Z$ est *localement intersection complète* *relative de codimension* $n+1$ [1], avec $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de n-cycles [2] de Z paramétrée par l'espace complexe réduit S vérifiant la condition

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} \text{pour tout } s \in S \text{ l'intersection } |X_s| \cap |Y| \text{ est finie et, localement sur } S, \\ \text{contenue dans un compact de } Z, \end{cases}$$

alors la condition d'incidence $|X_s| \cap Y \neq \emptyset$ définit naturellement un diviseur de Cartier effectif Σ_Y de S.

Contrairement au cas classique [C-VdW] (les grassmanniennes étant lisses), l'espace analytique réduit S peut présenter des singularités arbitraires et la construction de diviseur de Cartier ne se réduit pas à un argument de dimension.

Une des motivations pour décrire Σ_Y vient du problème de l'intégration de classes de cohomologie présentant une singularité le long de Y sur les cycles de la famille $(X_s)_{s\in S}$ ne rencontrant pas Y. Une telle classe dans $\mathrm{H}^n_c(Z - Y, \Omega^n_Z)$ donnera donc une fonction holomorphe sur $S - \Sigma_Y$, et la question est de savoir si une classe à singularité « méromorphe » le long de Y donnera une fonction méromorphe le long de Σ_Y.

Sous l'hypothèse (F) ci-dessus, nous répondons affirmativement à cette question dans un cadre général, en précisant également comment contrôler l'ordre des pôles le long de Σ_Y de la fonction méromorphe définie par l'intégrale sur les cycles d'une classe ω en fonction de l'ordre de la singularité le long de Y pour ω.

Ceci complète, dans ce cadre, l'étude entreprise par Louis Doustaing dans [Dous].

Dans le cas où les cycles sont compacts, on peut évidemment se contenter de considérer la famille universelle des n-cycles de Z paramétrée par $S = \mathrm{C}_n(Z)$ (l'espace des n-cycles compacts de Z). On obtient alors un procédé de construction pour

a) des diviseurs de Cartier effectifs d'ouverts de Zariski denses de $\mathrm{C}_n(Z)$, associés à des intersections complètes locales relatives $Y \subset Z$ de codimension $n+1$,

b) des fonctions méromorphes « à pôles contrôlés » sur ces mêmes diviseurs de Cartier effectifs.

Donnons un énoncé précis dans ce cadre.

THÉORÈME 1. – *Soit Z un espace complexe et $Y \subset Z$ localement intersection complète relative de codimension $n+1$. Soit Ω un ouvert de $\mathrm{C}_n(Z)$ qui vérifie*

$$(F_c)\begin{cases} \textit{quel que soit } X \textit{ dans } \Omega, \textit{ l'ensemble } |X| \cap |Y| \textit{ est fini et} \\ |\Sigma_Y| = \{X \in \Omega : |X| \cap |Y| \neq \emptyset\} \textit{ est d'intérieur vide dans } \Omega. \end{cases}$$

1) *Alors l'ensemble $|\Sigma_Y|$ est naturellement muni d'une structure de diviseur de Cartier effectif dans Ω.*

2) *Pour $\omega \in \mathrm{H}^n(Z - Y, \Omega^n_Z)$ présentant un pôle d'ordre $\leq k$ le long de Y, c'est-à-dire tel que la section de $\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)$ définie par ω soit localement annulée par $\mathcal{I}^k_Y$, alors la fonction holomorphe définie par*

$$X \to \int_X \omega \quad \textit{pour } X \in \Omega \setminus \Sigma_Y$$

présente le long de Σ_Y un pôle d'ordre $\leq k$.

---

[1] Cela veut dire que Y est localement donné par une suite régulière de $n+1$ éléments.

[2] non nécessairement compacts

3) *Pour une famille plate* $\mathcal{Y} \subset \Theta \times Z$ *d'intersections complètes locales relatives dans* Z *pour lesquelles la condition* $(\mathrm{F_c})$ *reste vérifiée sur* Ω [3], *on obtient une famille plate* $\Sigma_{\mathcal{Y}} \subset \Theta \times \Omega$ *de diviseurs de Cartier telle que* $\forall \theta \in \Theta$ *on ait* $(\Sigma_{\mathcal{Y}})_\theta = \Sigma_{\mathcal{Y}_\theta}$.

Terminons cette introduction en signalant que notre construction du diviseur de Cartier effectif Σ_Y se rattache au début du programme proposé par P. Deligne dans [De], quoique notre contexte soit assez différent. Bien sûr notre point de vue est plus « géométrique », étant en amont du point de vue « cohomologique » de [De]. Cependant, le lecteur trouvera beaucoup de ressemblances entre les constructions de R. Elkik dans [E] et nos constructions.

Signalons enfin que le résultat obtenu par M. Kaddar [K, p. 321] a été une de nos motivations pour chercher à construire un diviseur de Cartier, et donc un fibré en droites sur S.

Précisons le plan de notre article.

Nous commençons le premier chapitre en précisant le contexte dans lequel nous allons travailler : nous introduisons la notion « d'équerre » correspondant à certains diagrammes d'espaces complexes

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{p} & Z \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

Il s'agit d'une généralisation de la notion de famille analytique de cycles de Z (non nécessairement compacts) paramétrée par l'espace réduit S. L'intérêt de cet outil réside dans son bon comportement par diverses fonctorialités (non seulement en S mais aussi en Z et $\widetilde{Z}$). C'est aussi un cadre naturel pour l'intégration des classes de cohomologies (avec singularités éventuelles).

Au paragraphe 4 nous prouvons le théorème sur l'ordre des pôles.

Le chapitre II est consacré à la construction du diviseur de Cartier effectif associé à un pôle $Y \subset Z$ localement intersection complète relative. Nous montrons alors que dans ce cas le contrôle de l'ordre des pôles des fonctions méromorphes $s \to \int_{X_s} \omega$ est aussi obtenu à l'aide des puissances de l'équation locale du diviseur de Cartier Σ_Y associé à Y.

Nous concluons en donnant une version à paramètre, qui est conséquence simple du cas absolu, grâce aux bonnes propriétés fonctorielles de nos constructions.

L'appendice rassemble quelques résultats « classiques » mais peu accessibles dans le contexte précis que nous utilisons.

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE. – On appellera *espace complexe* un espace analytique complexe, séparé et dénombrable à l'infini. Pour un espace complexe X, on notera $|X|$ son espace topologique sous-jacent. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces complexes. Pour $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et X' un sous-espace (resp. un cycle) de X, on notera $f_*\mathcal{F}$ et $f(X')$ (resp. f_*X') leurs images directes par f si elles existent. Pour $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y et Y' un sous-espace de Y, on notera $f^*\mathcal{G}$ et f^*Y' leurs images réciproques par f.

[3] Les Y qui sont localement intersections complètes relatives forment un ouvert; voir [Do].

Chapitre I

1. Pondérations géométriques plates

Comme la notion de graphe d'une famille analytique est au cœur de la définition d'une pondération géométrique, que l'on va donner dans ce paragraphe, commençons par rappeler sa définition (dans le cas des cycles non nécessairement compacts).

Graphe d'une famille analytique de cycles. Soit Z un espace complexe. Un n-cycle de Z est une combinaison linéaire localement finie (éventuellement vide)

$$X = \sum_{j \in I} n_j X_j$$

de sous-ensembles analytiques fermés et irréductibles de Z de dimension pure n à coefficients dans $\mathbb{N}^*$ (que l'on supposera deux à deux distincts dans une telle écriture) . Dans cet article, on appellera une *famille analytique de n-cycles* ce qui dans [B1] s'appelle famille analytique *locale* de n-cycles de Z (voir [B1, chapitre IV, définition 2]). Le lecteur pourra consulter [B-V] pour une discussion sur les définitions équivalentes de cette notion. Soit $X = \Sigma n_j X_j$ un n-cycle dans Z. Pour tout z dans Z on pose

$$\mathrm{mult}_z(X) := \sum n_j \,\mathrm{mult}_z(X_j),$$

où $\mathrm{mult}_z(X_j)$ est la multiplicité ordinaire du point z dans le sous-ensemble analytique X_j (voir l'appendice). On remarquera que $\mathrm{mult}_z(X) \in \mathbb{N}$ car la famille des X_j est localement finie et $\mathrm{mult}_z(X) = 0$ si et seulement si z n'est pas dans le *support*, $|X| = \cup X_j$, du cycle X. L'entier $\mathrm{mult}_z(X)$ sera appelé la *multiplicité du point z dans le cycle X*. La fonction

$$Z \to \mathbb{N} \,;\, z \mapsto \mathrm{mult}_z(X)$$

est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski. Dans le cas relatif, c'est-à-dire pour une famille analytique de n-cycles $(X_s)_{s \in S}$ de Z, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. – *Soit $(X_s)_{s \in S}$ une famille analytique de cycles de Z paramétrée par l'espace complexe réduit S. Alors la fonction*

$$S \times Z \to \mathbb{N} \,;\, (s, z) \mapsto \mathrm{mult}_z(X_s)$$

est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski.

Nous donnons une démonstration de cette proposition dans l'appendice.

La proposition 2 nous permet de définir le graphe X de la famille analytique $(X_s)_{s \in S}$ comme cycle de $S \times Z$ pour S de dimension pure : le support de ce cycle sera le sous-ensemble analytique

$$|X| = \{(s, z) \in S \times |Z| : \mathrm{mult}_z(X_s) \geq 1\}.$$

Pour X_j une composante irréductible de $|X|$, soit n_j la valeur générique de la fonction $(s, z) \mapsto \mathrm{mult}_z(X_s)$ sur X_j. On pose $X = \sum n_j X_j$.

Soit S un espace complexe réduit et irréductible. Nous dirons que le morphisme $\pi : \widetilde{Z} \rightarrow S$ est *équidimensionnel* de dimension relative (pure) égale à n si la restriction de π à chaque composante irréductible de $\widetilde{Z}$ est à fibres de dimension (pure) n.

Pour S réduit non nécessairement irréductible on dira que $\pi : \widetilde{Z} \rightarrow S$ est équidimensionnel de dimension relative (pure) égale à n, si pour chaque composante irréductible S_i de S, la restriction $\pi_i : \widetilde{Z}_i \rightarrow S_i$ de π au sous-espace réduit $\widetilde{Z}_i$ de $\widetilde{Z}$ formé des composantes irréductibles de $\widetilde{Z}$ dont l'image par π est contenue dans S_i satisfait la définition précédente.

On remarquera que si $\pi : \widetilde{Z} \rightarrow S$ est équidimensionnel et S de dimension pure, alors $\widetilde{Z}$ est également de dimension pure.

Soit S un espace complexe réduit de dimension pure et soit $\pi : \widetilde{Z} \rightarrow S$ un morphisme d'espaces complexes que nous supposerons équidimensionnel de dimension relative (pure) égale à n.

DÉFINITION 1. – *Nous appellerons* pondération géométrique *de π la donnée d'un cycle $\widetilde{X}$ de $S \times \widetilde{Z}$ vérifiant*

$$\text{(PG)} \qquad \forall s \in S \qquad |\widetilde{X}| \cap (\{s\} \times \widetilde{Z}) = \{s\} \times |\pi^{-1}(s)|.$$

Remarque 1. – Cette définition se généralise au cas où S n'est pas de dimension pure en considérant des pondérations géométriques pour chaque restriction $\pi_i : \widetilde{Z}_i \rightarrow S_i$ quand i parcourt les composantes irréductibles de S. Mais, comme nous l'a fait remarquer le rapporteur, les cycles $\widetilde{X}_i \subset S_i \times \widetilde{Z}_i$ donnant ces différentes pondérations géométriques sont de dimension éventuellement différentes et donc $\widetilde{X} := \Sigma \widetilde{X}_i$ n'est plus un cycle de $S \times \widetilde{Z}$ au sens de notre définition d'un cycle.

On pourrait, bien sûr, régler cette difficulté en introduisant la notion de cycle relatif (de dimension relative pure) mais cela n'apporterait que peu de substance mathématique en alourdissant encore le présent texte. Aussi nous contenterons-nous ici de cette remarque et ferons-nous (voir par exemple Théorème 7) l'hypothèse que S est de dimension pure, ce qui n'est probablement pas nécessaire.

Si $\widetilde{X}$ est une pondération géométrique de π, il existe un ouvert dense S' de S (par exemple l'ouvert des points normaux de S [4]) et une famille analytique (unique) $(\widetilde{X}_s)_{s \in S'}$ de cycles de dimension pure n de $\widetilde{Z}$, dont le graphe est le cycle $\widetilde{X}' = \widetilde{X} | S' \times \widetilde{Z}$.

On remarquera que $\widetilde{X}_s$ n'est pas défini pour s dans $S \backslash S'$. Pour une discussion plus détaillée, le lecteur se réfèrera à l'appendice.

DÉFINITION 2. – *Nous dirons que $\widetilde{X}$ est une pondération* géométriquement plate [5] *de π (ou encore que $(\pi, \widetilde{X})$ est géométriquement plat) si $\widetilde{X}$ est le graphe d'une famille analytique $(\widetilde{X}_s)_{s \in S}$ de cycles de $\widetilde{Z}$ de dimension pure n.*

On remarquera que si une telle famille analytique existe, elle est unique, puisque sa restriction à l'ouvert dense S' de S est déterminée par π et $\widetilde{X}$ vérifiant (PG). Donc pour $\widetilde{X}$ géométriquement plate le cycle $\widetilde{X}_s$ est défini pour tout s dans S.

[4] Voir [B1, chapitre I, théorème 1].

[5] Cette terminologie est consistante avec la notion de morphisme géométriquement plat introduite dans [B2].

a) *L'exemple standard.* Soit Z un espace complexe et soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de cycles de dimension pure n de Z paramétrée par un espace complexe réduit S. Soit $\widetilde{Z} = \{(s,z) \in S \times Z : z \in |X_s|\}$ le support du graphe de cette famille, muni de sa structure réduite, et soit $\pi : \widetilde{Z} \to S$ la projection canonique. Alors la famille $(\{s\} \times X_s)_{s\in S}$ de n-cycles de $\widetilde{Z}$ est analytique; notons $\widetilde{X}$ son graphe (qui est donc un cycle de $S \times \widetilde{Z}$). Le cycle $\widetilde{X}$ est une pondération géométrique sur π qui est géométriquement plate (essentiellement par définition).

Dans ces conditions, nous dirons que $\widetilde{X}$ est la *pondération géométriquement plate de π associée à la famille analytique $(X_s)_{s\in S}$ de Z.*

b) *Une construction simple non fonctorielle.* Soit S un espace complexe normal et soit $\pi : \widetilde{Z} \to S$ un morphisme équidimensionnel de dimension relative (pure) n. Soit $|\widetilde{X}|$ le support du graphe de π considéré comme cycle de $S \times \widetilde{Z}$ avec toutes ses multiplicités égales à 1. Alors $|\widetilde{X}|$ est une pondération géométriquement plate de π (grâce à la normalité de S).

c) *Une construction moins simple mais fonctorielle.* Soit S un espace complexe réduit et soit $\pi : \widetilde{Z} \to S$ un morphisme plat d'espaces complexes ayant des fibres de dimension pure n. *On ne suppose pas que $\widetilde{Z}$ est réduit.* Désignons par $\widetilde{X}_s$ le cycle de $\widetilde{Z}$ associé au sous-espace complexe $\pi^{-1}(s)$ de $\widetilde{Z}$. Alors la famille $(\widetilde{X}_s)_{s\in S}$ est analytique d'après [B1, chapitre V, théorème 8]. Notons $\widetilde{X}$ le graphe de cette famille analytique (comme cycle de $S \times \widetilde{Z}$). Alors $(\pi, \widetilde{X})$ est géométriquement plat. On dira que $\widetilde{X}$ est la *pondération géométrique (plate) naturelle associée au morphisme plat $\pi : \widetilde{Z} \to S$.*

—Un exemple simple.— Soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}$, et soient

$$\widetilde{Z}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 = x \text{ et } y = 0\}$$
$$\widetilde{Z}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : z^3 = y \text{ et } x = 0\}.$$

Soit $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2$ muni de sa structure de courbe réduite de $\mathbb{C}^3$ et soit

$$\pi : \widetilde{Z} \to S$$

la restriction à $\widetilde{Z}$ de la projection $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ donnée par $(x,y,z) \to (x,y)$. Le graphe de π dans $S \times \widetilde{Z}$ a deux composantes irréductibles

$$\widetilde{X}_1 = \{((x,y),(a,b,c)) : x = a = c^2, y = b = 0\}$$
$$\widetilde{X}_2 = \{((x,y),(a,b,c)) : x = a = 0, y = b = c^3\}.$$

Alors le cycle $3\widetilde{X}_1 + 2\widetilde{X}_2$ est une pondération géométrique plate sur π, alors que la pondération géométrique donnée par le cycle $\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2$ n'est pas plate (nous détaillerons pourquoi plus loin).

d) *Changement de base.* Soit $(\pi, \widetilde{X}) : \widetilde{Z} \to S$ un morphisme géométriquement plat de dimension relative n et soit $\lambda : T \to S$ un morphisme d'un espace complexe réduit T dans S. Considérons $\widetilde{Z}_T := T \times_S \widetilde{Z}$ et notons $\lambda^*\pi : \widetilde{Z}_T \to T$ la projection canonique; alors $\lambda^*\pi$ est un morphisme n-équidimensionnel. Notons $\lambda^*\widetilde{X}$ le graphe de la famille analytique $(\{t\} \times \widetilde{X}_{\lambda(t)})_{t\in T}$ de n-cycles de $\widetilde{Z}_T$. Alors $(\lambda^*\pi, \lambda^*\widetilde{X})$ est un morphisme géométriquement plat et on appelle $\lambda^*\widetilde{X}$ *l'image réciproque de $\widetilde{X}$ par λ.*

Il est clair que le changement de base est transitif, c'est-à-dire que pour $(\pi, \widetilde{X})$ géométriquement plat, $\mu : T_2 \to T_1$ et $\lambda : T_1 \to S$, on a $(\lambda \circ \mu)^*\widetilde{X} = \mu^*(\lambda^*\widetilde{X})$.

On remarquera que nous n'avons défini l'image réciproque $\lambda^* \widetilde{X}$ de la pondération géométrique $\widetilde{X}$ que sous l'hypothèse qu'elle soit plate. En effet, déjà pour $T = \{s_0\}$, où s_0 est un point de S et $\lambda : \{s_0\} \hookrightarrow S$, définir $\lambda^* \widetilde{X}$ nécessite de définir $\widetilde{X}_{s_0}$. Ceci n'est vraiment raisonnable, comme on l'a remarqué plus haut, que quand la famille analytique des $(\widetilde{X}_s)_{s \in S'}$ (où S' est l'ouvert des points normaux de S) se prolonge analytiquement à S [6]. C'est précisément la condition de platitude géométrique sur $(\pi, \widetilde{X})$!

Il est facile de se convaincre que les constructions données en a) et c) sont compatibles aux changements de base; d'ailleurs c) se ramène à a). Nous allons expliquer sur notre exemple pourquoi la construction du b) n'est pas compatible au changement de base.

—Exemple (suite)—. Notons $S_1 = \{y = 0\}$ et $S_2 = \{x = 0\}$ les composantes irréductibles de S. Soit $\pi_i : \widetilde{Z}_i \to S_i$ pour $i = 1, 2$ les morphismes induits par π. Alors $(\pi_i, \widetilde{X}_i)$ est géométriquement plat pour $i = 1, 2$. Soit $T = \{(0,0)\}$ et $j_i : T \hookrightarrow S_i$ les injections évidentes pour $i = 1, 2$. On a $(j_1^* \pi_1, j_1^* \widetilde{X}_1) = \big(\pi_0, 2\{(0,0),(0,0,0)\}\big)$ et $(j_2^* \pi_2, j_2^* \widetilde{X}_2) = \big(\pi_0, 3\{(0,0),(0,0,0)\}\big)$ où $\pi_0 : \{(0,0,0)\} \to T = \{0,0\}$. Ceci explicite pourquoi $(\pi, \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2)$ n'est pas géométriquement plat.

e) *Image directe.* Considérons un diagramme commutatif de morphismes d'espaces complexes

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{f} & \widetilde{W} \\ & {\scriptstyle\pi} \searrow \;\; \swarrow {\scriptstyle\tilde{\pi}} & \\ & S & \end{array}$$

où S est réduit, π et $\tilde{\pi}$ sont n-équidimensionnels et f propre et surjectif. Soit $\widetilde{X}$ une pondération géométrique sur π qui soit plate. Définissons alors le cycle $f_* \widetilde{X}$ de $S \times \widetilde{W}$ comme le graphe de la famile analytique $(f_* \widetilde{X}_s)_{s \in S}$ de n-cycles de $\widetilde{W}$ [7]; en fait $\widetilde{X}$ est propre et génériquement finie par $\mathrm{id}_S \times f$ sur son image dans $S \times \widetilde{W}$ et $f_* \widetilde{X}$ est l'image directe de $\widetilde{X}$ par $\mathrm{id}_S \times f$ au sens des cycles. Alors $f_* \widetilde{X}$ est, par définition, une pondération géométrique plate de $\tilde{\pi}$.

On remarquera que, pour tout s dans S, le morphisme $f|_{\pi^{-1}(s)} : \pi^{-1}(s) \to \tilde{\pi}^{-1}(s)$ est propre et surjectif entre espaces de dimension pure n. Donc, au-dessus de chaque composante irréductible de $|\tilde{\pi}^{-1}(s)|$, il existe au moins une composante irréductible de $|\pi^{-1}(s)|$ qui est propre et génériquement finie par f sur celle-ci. Le fait que certaines composantes irréductibles de $|\pi^{-1}(s)|$ aient une image de dimension strictement inférieure à n ne gêne pas, comme l'a fait remarquer O. Gabber [8], puisque l'image directe au sens des cycles ne tient pas compte de telles composantes dans la définition du cycle $f_* \widetilde{X}_s$.

f) *Restriction.* Commençons par remarquer que si le morphisme $\pi : \widetilde{Z} \to S$ admet une pondération géométrique plate il est ouvert. Cela résulte du fait que les fibres de π sont des sous-ensembles analytiques de $\widetilde{Z}$ sous-jacents aux cycles d'une famille analytique paramétrée par S. Pour restreindre π à un ouvert de $\widetilde{Z}$, on peut donc, modulo un changement de base associé à l'inclusion d'un ouvert de S, se limiter au cas où $\widetilde{U} \subset \widetilde{Z}$ est un ouvert tel que $\pi(\widetilde{U}) = S$.

---

[6] ou au moins au normalisé faible de S

[7] D'après [B1, chapitre IV, théorème 6 (local)]

[8] Voir D. Barlet, *The Join Theorem*, manuscrit (Nancy 1994)

Si $\widetilde{X}$ est une pondération géométrique plate de π, alors $\widetilde{X} \mid S \times \widetilde{U}$ est une pondération géométrique plate de $\pi \mid \widetilde{U} : \widetilde{U} \to S$: en effet la famille analytique $(\widetilde{X}_s)_{s\in S}$ se restreint à $\widetilde{U}$ en une famille analytique de $\widetilde{U}$ de graphe $\widetilde{X} \mid S \times \widetilde{U}$.

2. Intégration associée à une pondération plate

Soit $\pi : \widetilde{Z} \to S$ un morphisme d'espaces complexes, avec S réduit, muni d'une pondération géométriquement plate $\widetilde{X}$. Soit c/π la famille de tous les sous-ensembles π-propres de $\widetilde{Z}$. Pour appliquer les résultats de [B-V], nous aurons besoin du fait que c/π est une famille paracompactifiante de fermés (voir [G] et [B-V]). Pour le vérifier, on note d'abord que $\widetilde{Z}$ et S étant localement compacts et dénombrables à l'infini, les éléments dans c/π sont fermés et paracompacts. Il ne reste alors qu'à montrer que tout sous-ensemble π-propre de $\widetilde{Z}$ admet un voisinage π-propre. Soit alors F un fermé π-propre et soient $\psi : \widetilde{Z} \to \mathbb{R}_+$ et $\varphi : S \to \mathbb{R}_+$ des fonctions propres et continues (dont l'existence résulte du fait que $\widetilde{Z}$ et S sont dénombrables à l'infini). Comme $(\varphi \circ \pi|_F)^{-1}([0,r])$ est compact pour tout $r > 0$, il existe une fonction continue $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\psi < \theta \circ \varphi \circ \pi$ sur F. Alors le sous-ensemble de $\widetilde{Z}$ défini par l'inégalité $\psi \leq \theta \circ \varphi \circ \pi$ est un voisinage π-propre de F. Les résultats de [B-V] nous donnent alors une application linéaire, fonctorielle en un sens qui sera précisé plus loin :

$$\int_{\pi,\widetilde{X}} : \mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z}, \Omega^n_{\widetilde{Z}}) \to \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_S)$$

définie par l'intégration des classes de cohomologie sur la famille analytique $(\widetilde{X}_s)_{s\in S}$ de cycles de $\widetilde{Z}$. Pour $w \in \mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z}, \Omega^n_{\widetilde{Z}})$ et $s \in S$ on a

$$\Big(\int_{\pi,\widetilde{X}} w\Big)(s) := \int_{\widetilde{X}_s} w.$$

En fait cette construction est faisceautique sur S (c'est-à-dire on a un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules : $R^n\pi_!\Omega^n_{\widetilde{Z}} \to \mathcal{O}_S$).

On a la compatibilité au changement de base, c'est-à-dire que pour un morphisme d'espaces complexes $\lambda : T \to S$ avec T réduit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z}, \Omega^n_{\widetilde{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, "\int_{(\pi,\widetilde{X})}"'] & \mathrm{H}^n_{c/\lambda^*\pi}(\widetilde{Z}_T, \Omega^n_{\widetilde{Z}_T}) \arrow[d, "\int_{(\lambda^*\pi,\lambda^*\widetilde{X})}"] \\
\mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_S) \arrow[r, "\lambda^*"] & \mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T)
\end{tikzcd}$$

où $\widetilde{Z}_T = T \times_S \widetilde{Z}$ et $\lambda^*\widetilde{X}$ est la pondération géométrique plate sur $\lambda^*\pi$ définie au § 1 d).

Restriction. Si $\widetilde{U}$ est un ouvert de $\widetilde{Z}$, comme π est ouvert (car $(\pi, \widetilde{X})$ est géométriquement plat), on peut supposer $\pi(\widetilde{U}) = S$, le cas général s'y ramenant en utilisant le changement de base associé à l'inclusion d'un ouvert de S. On a alors $(\pi|\widetilde{U}, \widetilde{X}|\widetilde{U})$ qui est géométriquement plat (le fait d'être une famille analytique de n-cycles est une propriété locale sur $S \times \widetilde{Z}$).

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^n_\Psi(\widetilde{U},\Omega^n_{\widetilde{U}}) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\int_{(\pi|\widetilde{U},\widetilde{X}|\widetilde{U})}"'] & & \mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z},\Omega^n_{\widetilde{Z}}) \arrow[dl, "\int_{(\pi,\widetilde{X})}"] \\ & \mathrm{H}^0(S,\mathcal{O}_S) & \end{tikzcd}$$

où τ est le prolongement par 0 et Ψ est la famille des fermés $\pi|_{\widetilde{U}}$-propres.

Image directe. Dans la situation du e) du § 1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^n_{c/\tilde{\pi}}(\widetilde{W},\Omega^n_{\widetilde{W}}) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\int_{(\tilde{\pi},f_*\widetilde{X})}"'] & & \mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z},\Omega^n_{\widetilde{Z}}) \arrow[dl, "\int_{(\pi,\widetilde{X})}"] \\ & \mathrm{H}^0(S,\mathcal{O}_S) & \end{tikzcd}$$

qui ne fait que traduire l'égalité $\displaystyle\int_{\widetilde{X}_s} f^*\alpha = \int_{f_*\widetilde{X}_s} \alpha$ pour chaque s : c'est la formule du changement de variable dans une intégrale, complétée par le fait qu'un sous-ensemble analytique fermé d'intérieur vide est de mesure nulle (voir [L]).

3. Équerres, pôles

Il sera commode d'utiliser la définition suivante qui généralise la notion de famille analytique de cycles de Z paramétrée par S.

DÉFINITION 3. – *Soit S un espace complexe réduit et considérons deux morphismes d'espaces complexes*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ S & \end{tikzcd}$$

*Nous supposerons π équidimensionnel à fibres de dimension pure n. Nous dirons que $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ est une n-*équerre *sur S si $\widetilde{X}$ est une pondération géométrique plate de π. Nous omettrons éventuellement le préfixe « n » ou la précision « sur S » si le contexte ne prête pas à ambiguïté.*

L'exemple standard d'équerre correspond à la donnée d'une famille analytique $(X_s)_{s\in S}$ de cycles de Z paramétrée par l'espace complexe réduit S : on considère pour $\widetilde{Z}$ le support du graphe de la famille $(X_s)_{s\in S}$, c'est-à-dire $\widetilde{Z} = \{(s,z) \in S \times Z / z \in |X_s|\}$, et pour π et p les projections de $\widetilde{Z}$ sur S et Z. On considère alors $\widetilde{X}$ la pondération géométrique (plate) sur π associée à la famille analytique $(X_s)_{s\in S}$ et on appelle *l'équerre associée à la famille analytique $(X_s)_{s\in S}$ de Z* le triplet

$$\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p).$$

Une équerre est simplement la donnée d'un morphisme géométriquement plat $(\pi, \widetilde{X})$ et d'un morphisme arbitraire $p : \widetilde{Z} \to Z$ de même source que π.

Opérations sur les équerres (comparer avec d), e) et f) du § 1). Pour $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ une n-équerre sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$ considérons les opérations suivantes :

—Changement de base.— Soit $\lambda : T \to S$ un morphisme d'espaces complexes avec T réduit, et soit $p_1 : T \times_S \widetilde{Z} \to Z$ le morphisme composé de la projection canonique suivie de p. On dit alors que l'équerre $\lambda^*\mathcal{E} := (\lambda^*\pi, \lambda^*\widetilde{X}, p_1)$ est obtenue de $\mathcal{E}$ par *changement de base.*

—Image directe.— Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \widetilde{W} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & Z \\ & S & \end{tikzcd}$$

de morphismes d'espaces complexes avec f propre et surjectif, $\tilde{\pi}$ n-équidimensionnel et $p = q \circ f$. Alors l'équerre $f_*\mathcal{E} := (\tilde{\pi}, f_*\widetilde{X}, q)$ s'appelle *l'image directe de $\mathcal{E}$ par f.*

—Restriction.— Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de $\widetilde{Z}$; alors comme on a remarqué dans f) de § 1, le cycle $\widetilde{X} \mid S \times \widetilde{U}$ est une pondération géométrique plate du morphisme $\pi \mid \widetilde{U} : \widetilde{U} \to S$. En complétant cette restriction par le changement de base $i : \pi(\widetilde{U}) \to S$, on obtient l'équerre

$$\mathcal{E} \mid \widetilde{U} := \big(i^*(\pi \mid \widetilde{U}), i^*(\widetilde{X} \mid S \times \widetilde{U}), p \mid \widetilde{U}\big).$$

On dira que $\mathcal{E} \mid \widetilde{U}$ est *la restriction de $\mathcal{E}$ à l'ouvert $\widetilde{U}$.* S'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on notera $\mathcal{E} \mid U$ au lieu de $\mathcal{E} \mid p^{-1}(U)$ pour un ouvert U de Z.

Intégration sur les équerres. Soit $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ une équerre sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$. Si Φ est la famille des fermés F de Z tels que $p^{-1}(F)$ soit π-propre, la composition de l'image réciproque

$$p^* : \mathrm{H}^n_\Phi(Z, \Omega^n_Z) \to \mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z}, \Omega^n_{\widetilde{Z}})$$

et de l'intégration sur $(\pi, \widetilde{X})$

$$\int_{\pi, \widetilde{X}} : \mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z}, \Omega^n_{\widetilde{Z}}) \to \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_S)$$

fournit un morphisme d'*intégration sur l'équerre*

$$\int_{\mathcal{E}} : \mathrm{H}^n_\Phi(Z, \Omega^n_Z) \to \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_S)$$

dont les propriétés fonctorielles se déduisent aisément de celles de $\displaystyle\int_{\pi, \widetilde{X}}$.

Pour une sous-famille de supports Φ' de Φ on dira également que le morphisme évident $\mathrm{H}^n_{\Phi'}(Z, \Omega^n_Z) \to \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_S)$ est un morphisme d'intégration sur l'équerre. Nous laissons le soin au lecteur d'écrire, pour des équerres, le comportement de $\displaystyle\int_{\mathcal{E}}$ par changement de base, restriction et image directe.

Les classes de cohomologie (de Z) que nous voulons intégrer sur l'équerre $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ auront en fait des singularités sur un sous-espace complexe Y de Z. Il sera donc commode d'introduire la notion suivante :

DÉFINITION 4. – *Soit* $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ *une* n*-équerre sur* S. *Nous appellerons* pôle pour $\mathcal{E}$ *la donnée d'un sous-espace* Y *de* Z *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $p^*(Y)$ *est fini sur* S,

2) $\pi(p^*Y)$ *est d'intérieur vide dans* S.

Dans ces conditions, le sous-espace $\Sigma := \pi(p^*Y)$ *de* S *sera appelé le lieu polaire de* $(\mathcal{E}, Y)$.

Remarque 2

1) Soulignons le fait que Σ est l'image directe du sous-espace p^*Y de $\widetilde{Z}$ par le morphisme π, c'est-à-dire le sous-espace de S défini par le noyau du morphisme $\mathcal{O}_S \to \pi_*\mathcal{O}_{p^*Y}$.

2) Le sous-espace Σ ne dépend pas de la pondération géométrique $\widetilde{X}$ du morphisme π.

Avant de pouvoir énoncer notre premier théorème, il nous faut rappeler quelques notions concernant la cohomologie locale.

Soit Z un espace complexe, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Z$-module, Y un sous-espace complexe de Z et $k \geq 0$ un entier. Alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{H}^k_Y(Z, \mathcal{F})$ et le $\mathcal{O}_Z$-module $\underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F})$ sont indépendants de la structure analytique de Y. Soit $\mathcal{I}_Y$ le $\mathcal{O}_Z$-idéal qui définit Y et soit $\nu \geq 0$ un entier. Notons $\mathcal{A}^\nu$ le sous-module de $\underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F})$ formé de tous les germes annulés par $\mathcal{I}_Y^\nu$ et posons

$$\underline{\mathrm{H}}^k_{[Y]}(\mathcal{F}) := \bigcup_{\nu \geq 0} \mathcal{A}^\nu.$$

Alors $\underline{\mathrm{H}}^k_{[Y]}(\mathcal{F})$ est un sous-module de $\underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F})$, appelé la partie méromorphe de $\underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F})$. On considérera $\underline{\mathrm{H}}^k_{[Y]}(\mathcal{F})$ toujours comme un $\mathcal{O}_Z$*-module filtré*, muni de la filtration $(\mathcal{A}^\nu)_{\nu \geq 0}$, l'idéal $\mathcal{I}_Y$ étant précisé si nécessaire.

On définit la partie méromorphe de $\mathrm{H}^k_Y(Z, \mathcal{F})$, notée $\mathrm{H}^k_{[Y]}(Z, \mathcal{F})$, comme étant l'image réciproque de $\Gamma\big(Z, \underline{\mathrm{H}}^k_{[Y]}(\mathcal{F})\big)$ par la flèche latérale

$$\mathrm{H}^k_Y(Z, \mathcal{F}) \to \Gamma\big(Z, \underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F})\big)$$

et on la considérera toujours comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel filtré, muni de la filtration induite par la filtration de $\underline{\mathrm{H}}^k_{[Y]}(\mathcal{F})$.

À l'injection canonique $j : Y' \hookrightarrow Y$ d'un sous-espace complexe Y' de Y correspondent des morphismes canoniques

$$\hat{\jmath} : \mathrm{H}^k_{Y'}(Z, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^k_Y(Z, \mathcal{F})$$
$$\underline{\hat{\jmath}} : \underline{\mathrm{H}}^k_{Y'}(\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F}).$$

Ils induisent respectivement des morphismes filtrés

$$[\hat{\jmath}] : \mathrm{H}^k_{[Y']}(Z, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^k_{[Y]}(Z, \mathcal{F})$$
$$[\underline{\hat{\jmath}}] : \underline{\mathrm{H}}^k_{[Y']}(\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{H}}^k_{[Y]}(\mathcal{F}).$$

En particulier, dans le cas où $|Y'| = |Y|$ et $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{I}_{Y'}$, les deux flèches $\hat{\jmath}$ et $\underline{\hat{\jmath}}$ sont l'identité, mais les flèches $[\hat{\jmath}]$ et $[\underline{\hat{\jmath}}]$ sont des monomorphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels filtrés et de $\mathcal{O}_Z$-modules filtrés (respectivement) et ne sont pas en général des isomorphismes filtrés.

Comme chaque classe ω dans $\mathrm{H}^{k-1}(Z \setminus Y, \mathcal{F})$ induit une section globale du faisceau $\underline{\mathrm{H}}^k_Y(\mathcal{F})$, on pose la définition suivante.

DÉFINITION 5. – *Soit Y un sous-espace de l'espace complexe Z défini par l'idéal $\mathcal{I}_Y$. Soient n et ν des entiers ≥ 0; nous dirons qu'une classe ω dans $\mathrm{H}^n(Z \setminus Y, \mathcal{F})$ a une singularité d'ordre $\leq \nu$ le long de Y si $\mathcal{I}_Y^\nu$ annule la section globale de $\underline{\mathrm{H}}_Y^{n+1}(\mathcal{F})$ induite par ω.*

Ajoutons à ces rappels le lemme suivant auquel nous aurons souvent recours :

LEMME 3. – *Soit un carré commutatif d'espaces complexes*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ S \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$

Alors $p(f^*Y)$ est un sous-espace complexe de $g^*q(Y)$ si les deux espaces sont définis.

La démonstration est un exercice sur la catégorie des espaces annelés.

4. Le théorème sur l'ordre des pôles

THÉORÈME 4 (Ordre des pôles). – *Soit $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ une n-équerre sur S et soit $Y \subset Z$ un pôle pour $\mathcal{E}$. Soit $\Sigma = \pi(p^*Y)$ le lieu polaire de $(\mathcal{E}, Y)$. Alors il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire naturelle*

$$\rho_{\mathcal{E},Y} : \mathrm{H}_Y^{n+1}(Z, \Omega_Z^n) \to \mathrm{H}_\Sigma^1(S, \mathcal{O}_S)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1) *L'application $\rho_{\mathcal{E},Y}$ est compatible avec l'intégration sur l'équerre $\mathcal{E} \mid Z \setminus Y$, c'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_\Psi^n(Z \setminus Y, \Omega_Z^n) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\int_{\mathcal{E}|Z-Y}"'] & \mathrm{H}_Y^{n+1}(Z, \Omega_Z^n) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{E},Y}"] \\ \mathrm{H}^0(S \setminus \Sigma, \mathcal{O}_S) \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{H}_\Sigma^1(S, \mathcal{O}_S) \end{tikzcd}$$

où $\Psi = \Phi \cap (Z \setminus Y)$, avec Φ la famille des fermés F tels que $p^{-1}(F)$ soit π-propre.

2) *L'application $\rho_{\mathcal{E},Y}$ donne un morphisme d'espaces vectoriels filtrés*

$$[\rho_{\mathcal{E},Y}] : \mathrm{H}_{[Y]}^{n+1}(Z, \Omega_Z^n) \to \mathrm{H}_{[\Sigma]}^1(S, \mathcal{O}_S)$$

où les filtrations par l'ordre des pôles sont associées respectivement aux sous-espaces Y de Z et Σ de S (avec leurs structures « nilpotentes » respectives).

3) *L'application $\rho_{\mathcal{E},Y}$ est fonctorielle par changement de base $\lambda : T \to S$ pourvu que $\lambda^*\Sigma$ soit d'intérieur vide dans T (alors Y est encore un pôle pour $\lambda^*\mathcal{E}$).*

4) *Si $q : Z \to Z_1$ est un morphisme d'espaces complexes et si $Y_1 \subset Z_1$ est un sous-espace de Z_1 tel que $q^*Y_1 = Y$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{Y_1}^{n+1}(Z_1, \Omega_{Z_1}^n) \arrow[dd, "q^*"'] \arrow[dr, "\rho_{\mathcal{E}_1,Y_1}"] & \\ & \mathrm{H}_\Sigma^1(S, \mathcal{O}_S) \\ \mathrm{H}_Y^{n+1}(Z, \Omega_Z^n) \arrow[ur, "\rho_{\mathcal{E},Y}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E}_1 = (\pi, \widetilde{X}, q \circ p)$ admet Y_1 pour pôle.

5) *L'application $\rho_{\mathcal{E},Y}$ est compatible avec les images directes. De manière précise, considérons un diagramme commutatif de morphismes d'espaces complexes*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \widetilde{W} \arrow[r, "q"] \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] & Z \\ & S & & \end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, q \circ f)$ une n-équerre munie d'un pôle $Y \subset Z$ et où f est propre et surjectif avec $\tilde{\pi}$ n-équidimensionnel. Alors Y est un pôle pour $f_*\mathcal{E} = (\tilde{\pi}, f_*X, q)$, et de plus

$$\rho_{\mathcal{E},Y} = \rho_{\mathcal{E}_1,Y}.$$

Remarque 3

1) Dans le n° 5 du théorème ci-dessus, notons Σ et Σ_1 les lieux polaires de $(\mathcal{E}, Y)$ et $(f_*\mathcal{E}, Y)$ respectivement. Alors $|\Sigma| = |\Sigma_1|$. Donc $\mathrm{H}^1_\Sigma(S, \mathcal{O}_S) = \mathrm{H}^1_{\Sigma_1}(S, \mathcal{O}_S)$ et l'égalité $\rho_{\mathcal{E},Y} = \rho_{\mathcal{E}_1,Y}$ traduit la formule $\int_{\widetilde{X}_s} f^*\alpha = \int_{f_*\widetilde{X}_s} \alpha$ (voir § 2). D'autre part les sous-espaces complexes Σ et Σ_1 sont en général différents, mais d'après le lemme 3, Σ est un sous-espace de Σ_1. En notant $j : \Sigma \to \Sigma_1$ l'injection canonique, on obtient le diagramme commutatif suivant de morphismes d'espaces vectoriels filtrés :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+1}_{[Y]}(Z, \Omega^n_Z) \arrow[r, "{[\rho_{\mathcal{E},Y}]}"] \arrow[dr, "{[\rho_{\mathcal{E}_1,Y}]}"'] & \mathrm{H}^1_{[\Sigma]}(S, \mathcal{O}_S) \arrow[d, "{[\hat{\jmath}]}"] \\ & \mathrm{H}^1_{[\Sigma_1]}(S, \mathcal{O}_S) \end{tikzcd}$$

où $[\hat{\jmath}]$ est le monomorphisme d'espaces vectoriels filtrés induit par j (voir § 3).

2) Il résultera de la démonstration du théorème que le morphisme $\rho_{\mathcal{E},Y}$ est unique, qu'il est déduit d'un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\underline{\rho}_{\mathcal{E},Y} : \pi_* p^* \underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z) \to \underline{\mathrm{H}}^1_\Sigma(\mathcal{O}_S)$$

et que celui-ci induit un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules filtrés

$$[\underline{\rho}_{\mathcal{E},Y}] : \pi_* p^* \underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{[Y]}(\Omega^n_Z) \to \underline{\mathrm{H}}^1_{[\Sigma]}(\mathcal{O}_S).$$

Démonstration (Théorème 4). – (i) Rappelons un lemme « plus ou moins classique » que nous aurons à utiliser.

LEMME 5. – *Soit Z un espace topologique séparé et soit Φ une famille de supports dans Z. Soit $Y \in \Phi$ et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur Z. On a alors une suite exacte longue de cohomologie*

$$\to \mathrm{H}^n_\Phi(Z, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^n_{\Phi\cap(Z\setminus Y)}(Z \setminus Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{n+1}_Y(Z, \mathcal{F}) \to \cdots$$

Rappelons rapidement la démonstration : comme on a toujours une suite exacte

$$0 \to \Gamma_Y(Z, \mathcal{F}) \to \Gamma_\Phi(Z, \mathcal{F}) \xrightarrow{res} \Gamma_{\Phi\cap(Z\setminus Y)}(Z \setminus Y, \mathcal{F})$$

il suffit de montrer que pour $\mathcal{F}$ flasque la restriction *res* est surjective. Supposons donc $\mathcal{F}$ flasque et $s \in \Gamma_{\Phi\cap(Z\setminus Y)}(Z \setminus Y, \mathcal{F})$. Alors s admet un prolongement $\tilde{s} \in \Gamma(Z, \mathcal{F})$. Mais $\operatorname{Supp} s = F \cap (Z \setminus Y)$ où $F \in \Phi$. On a donc $\operatorname{Supp} \tilde{s} \subset F \cup Y$ qui est encore dans Φ car $Y \in \Phi$. Cela montre que $\tilde{s} \in \Gamma_\Phi(Z, \mathcal{F})$, d'où la surjectivité de *res* pour $\mathcal{F}$ flasque et le lemme via l'usage de résolutions flasques.

□

(ii) Définissons le morphisme $\rho_{\mathcal{E},Y}$. Pour tout ouvert V de Z, il y a une flèche naturelle

$$\mathrm{H}^{n+1}_{Y\cap V}(V,\Omega^n_Z) \to \mathrm{H}^{n+1}_{p^{-1}(V)\cap p^{-1}(Y)}\big(p^{-1}(V),p^*\Omega^n_Z\big)$$

d'où un morphisme de $\mathcal{O}_Z$-modules

$$\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z) \to p_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z).$$

Les foncteurs p_* et p^* étant adjoints, ce morphisme correspond à un unique morphisme de $\mathcal{O}_{\widetilde{Z}}$-modules

$$p^*\big(\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)\big) \to \underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z)$$

ce qui nous donne un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\alpha : \pi_*p^*\big(\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)\big) \to \pi_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z).$$

Pour chaque ouvert U de S on a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n_\Phi\big(\pi^{-1}(U),p^*\Omega^n_Z\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^n_\Psi\big(\pi^{-1}(U)\setminus p^{-1}(Y),p^*\Omega^n_Z\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}\big(\pi^{-1}(U),p^*\Omega^n_Z\big) \arrow[r] & \cdots \\
\mathrm{H}^0(U,\mathcal{O}_S) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(U\setminus\Sigma,\mathcal{O}_S) \arrow[r] & \mathrm{H}^1_\Sigma(U,\mathcal{O}_S) &
\end{tikzcd}$$

avec $\Phi := (c/\pi)\cap\pi^{-1}(U)$ et $\Psi = (c/\pi)\cap\big(\pi^{-1}(U)\setminus p^{-1}(Y)\big)$, où la flèche verticale de gauche est l'intégration sur l'équerre $\mathcal{E} \mid \pi^{-1}(U)$ (voir § 3) et où la seconde flèche verticale est obtenue par l'intégration sur l'équerre $\mathcal{E} \mid \pi^{-1}(U\setminus\Sigma)$ en commençant par utiliser la restriction

$$\mathrm{H}^n_\Psi\big(\pi^{-1}(U)\setminus p^{-1}(Y),p^*\Omega^n_Z\big) \to \mathrm{H}^n_{c/\pi\cap\pi^{-1}(U\setminus\Sigma)}\big(\pi^{-1}(U\setminus\Sigma),p^*\Omega^n_Z\big)$$

qui provient de l'inclusion de $p^{-1}(Y)$ dans $\pi^{-1}(\Sigma)$.

Passons aux faisceaux associés sur S. Nous allons montrer d'abord que le préfaisceau

$$U \to \mathrm{H}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}\Big(\pi^{-1}(U),p^*\Omega^n_Z\Big)$$

engendre le faisceau $\pi_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z)$. Mais précisons tout de suite que si le préfaisceau

$$\mathcal{P}(V) := \mathrm{H}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(V,p^*\Omega^n_Z)$$

sur $\widetilde{Z}$ est un faisceau [9], le résultat est évident. Pour établir que le morphisme canonique

$$\varinjlim_{U\ni s} \mathrm{H}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}\big(\pi^{-1}(U),p^*\Omega^n_Z\big) \to \big(\pi_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z)\big)_s$$

est un isomorphisme, il suffit de remarquer que :

[9] C'est le cas par exemple si on suppose $p^{-1}(Y)\subset\widetilde{Z}$ localement intersection complète relative de codimension $n+1$ et Z lisse.

a) Pour chaque point z de $\pi^{-1}(s) \cap p^{-1}(Y)$ la composante connexe de $\pi^{-1}(U) \cap p^{-1}(Y)$ qui contient z décrit un système fondamental de voisinages ouverts de z dans $p^{-1}(Y)$ lorsque U décrit un système fondamental de voisinages ouverts de s dans S; ceci résulte de la finitude de $p^{-1}(Y)$ sur S.

b) Le préfaisceau $\mathcal{P}$ vérifie « Mayer-Vietoris » pour deux ouverts disjoints; c'est-à-dire $\mathcal{P}(V_1 \cup V_2) = \mathcal{P}(V_1) \oplus \mathcal{P}(V_2)$ si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Pour chaque s dans S et pour chaque entier $k \geq 0$ on vérifie alors que

$$\varinjlim_{U \ni s} \mathrm{H}^k_{c/\pi \cap \pi^{-1}(U)}\big(\pi^{-1}(U), p^*\Omega^n_Z\big) = \mathrm{H}^k_c\big(\pi^{-1}(s), p^*\Omega^n_Z \mid \pi^{-1}(s)\big) = \big(R^k\pi_!(p^*\Omega^n_Z)\big)_s.$$

On obtient donc le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
R^n\pi_!(p^*\Omega^n_Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z) \arrow[r] \arrow[d, "\exists!\beta"'] & R^{n+1}\pi_!(p^*\Omega^n_Z) \arrow[r] & \cdots \\
\mathcal{O}_S \arrow[r] & i_*i^*\mathcal{O}_S \arrow[r] & \underline{\mathrm{H}}^1_\Sigma(\mathcal{O}_S) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{G}$ désigne le faisceau associé au préfaisceau

$$U \to \mathrm{H}^n_\Psi\big(\pi^{-1}(U) - p^{-1}(Y), p^*(\Omega^n_Z)\big)$$

et où $i : S \setminus \Sigma \hookrightarrow S$ est l'inclusion. D'après [B-V] et [R], on a $R^{n+1}\pi_!(p^*\Omega^n_Z) = 0$ car les fibres de π sont de dimension n. Il existe donc un unique $\mathcal{O}_S$-morphisme

$$\beta : \pi_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z) \to \underline{\mathrm{H}}^1_\Sigma(\mathcal{O}_S)$$

qui complète le diagramme précédent. Comme S est réduit et Σ d'intérieur vide dans S, on a $\underline{\mathrm{H}}^0_\Sigma(\mathcal{O}_S) = 0$, et donc la bijectivité du morphisme latéral

$$e : \mathrm{H}^1_\Sigma(S, \mathcal{O}_S) \to \mathrm{H}^0\big(S, \underline{\mathrm{H}}^1_\Sigma(\mathcal{O}_S)\big)$$

(voir [G, I, théorème 4.5.1]).

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n_\Phi(Z \setminus Y, \Omega^n_Z) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{can}"] & \mathrm{H}^{n+1}_Y(Z, \Omega^n_Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{can}"] & \mathrm{H}^0\big(S, \pi_*p^*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)\big) \arrow[d, "\mathrm{H}^0(\alpha)"] \\
\mathrm{H}^n_{c/\pi}(\widetilde{Z} \setminus p^{-1}(Y), p^*\Omega^n_Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(\widetilde{Z}, p^*\Omega^n_Z) \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "\exists!"] & \mathrm{H}^0\big(S, \pi_*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_{p^{-1}(Y)}(p^*\Omega^n_Z)\big) \arrow[d, "\mathrm{H}^0(\beta)"] \\
\mathrm{H}^0(S \setminus \Sigma, \mathcal{O}_S) \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{H}^1_\Sigma(S, \mathcal{O}_S) \arrow[r, "e"] & \mathrm{H}^0\big(S, \underline{\mathrm{H}}^1_\Sigma(\mathcal{O}_S)\big)
\end{tikzcd}$$

On définit $\rho_{\mathcal{E},Y}$ comme le morphisme

$$e^{-1} \circ \mathrm{H}^0(\beta) \circ e' \circ \mathrm{can} : \mathrm{H}^{n+1}_Y(Z, \Omega^n_Z) \to \mathrm{H}^1_\Sigma(S, \mathcal{O}_S).$$

(iii) La définition du morphisme $\rho_{\mathcal{E},Y}$ montre que les n° 1, 3, 4 et 5 du théorème sont des conséquences immédiates des propriétés correspondantes de l'intégration sur les équerres.

Démontrons le n° 2 du théorème. Pour alléger les notations, on écrira ρ au lieu de $\rho_{\mathcal{E},Y}$. Soit ν un entier ≥ 0 et soit ω une classe d'ordre $\leq \nu$ dans $\mathrm{H}^{n+1}_Y(Z, \Omega^n_S)$. Cela veut dire que $\mathcal{I}^\nu_{Y,y}\omega_y = 0$ pour tout y dans Y, où ω_y désigne le germe défini par ω dans $\big(\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)\big)_y$. Montrons que $\mathcal{I}^\nu_{\Sigma,s}\rho(\omega)_s = 0$ pour tout s dans Σ, où $\rho(\omega)_s$ désigne le germe défini par $\rho(\omega)$ dans $\big(\underline{\mathrm{H}}^1_\Sigma(\mathcal{O}_S)\big)_s$. Comme α et β sont des $\mathcal{O}_S$-morphismes, il suffit de montrer que la section globale de $\pi_* p^* \underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_S)$, définie par ω, est annulée par $\mathcal{I}^\nu_\Sigma$ en tout point de Σ. Pour cela nous aurons besoin des faits élémentaires suivants :

LEMME 6. – *Soient A et B deux anneaux commutatifs et $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux.* (1) *Si I est un idéal de A et M est un A-module annulé par I, alors le B-module $B \otimes_A M$ est annulé par l'idéal engendré par $\varphi(I)$ dans B.* (2) *Si J est un idéal de B et N un B-module annulé par J, alors en tant que A-module, N est annulé par l'idéal $\varphi^{-1}(J)$ dans A.*

Soit z dans $p^{-1}(Y)$. La première partie du lemme ci-dessus montre que le germe défini par ω dans $\big(p^*\underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)\big)_z$ est annulé par $(p^*\mathcal{I}^\nu_Y)_z = (p^*\mathcal{I}_Y)^\nu_z = (\mathcal{I}_{p^*Y,z})^\nu$.

Ensuite pour $s = \pi(z)$, on voit que $(\pi_*\mathcal{I}^\nu_{p^*Y})_s$ annule le germe défini par ω dans $\big(\pi_* p^* \underline{\mathrm{H}}^{n+1}_Y(\Omega^n_Z)\big)_s$ et la deuxième partie du lemme montre que ce germe est annulé par $\tilde{\pi}_s^{-1}(\pi_*\mathcal{I}^\nu_{p^*Y})_s$, où $\tilde{\pi}_s : \mathcal{O}_{S,s} \to (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{Z}})_s$, donc aussi par $\mathcal{I}^\nu_{\Sigma,s}$ car $\mathcal{I}^\nu_{\Sigma,s} \subseteq \tilde{\pi}_s^{-1}\big((\pi_*\mathcal{I}^\nu_{p^*Y})_s\big)$. Ceci achève la démonstration du théorème 4.

$\square$

Chapitre II

L'objectif de ce second chapitre est de montrer qu'étant donnée une n-équerre $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$ et un pôle $Y \subset Z$ pour $\mathcal{E}$ qui est *localement intersection complète relative de codimension* $n+1$ (c'est-à-dire que l'idéal de Y dans Z est localement engendré par une suite régulière de $n+1$ éléments), on peut définir sur $|\pi(p^*Y)|$ une *structure naturelle de diviseur de Cartier effectif*, c'est-à-dire un idéal localement principal de $\mathcal{O}_S$ qui définit l'ensemble analytique $|\pi(p^*Y)|$. Cette construction vérifiera que l'intégration sur l'équerre d'une classe de $\mathrm{H}^n_\Phi(Z \setminus Y, \Omega^n_Z)$ dont l'ordre de singularité le long de Y est borné par un entier positif k induira une section globale de la puissance (tensorielle) k-ième du fibré en droites associé à ce diviseur de Cartier.

Le chapitre est divisé en deux paragraphes. Le premier paragraphe contient tous les résultats ainsi que leurs démonstrations, à l'exception des démonstrations du théorème 7 (cas simple) et de la proposition 9. Ces démonstrations, assez techniques, constituent le deuxième paragraphe.

5. Enoncé des résultats

Nous aurons besoin de la notion suivante : soit k un entier positif ou nul, soit X un espace analytique et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors on appelle *norme de* f la fonction analytique $N(f) : \mathrm{Sym}^k(X) \to \mathbb{C}$ définie par

$$N(f)(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} f(x_i).$$

Autrement dit $N(f) = s_k \circ \mathrm{Sym}^k(f)$ où $s_k : \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est la k-ième fonction symétrique élémentaire et $\mathrm{Sym}^k(f) : \mathrm{Sym}^k(X) \to \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})$ est l'application canoniquement induite par f. On remarquera que pour $k = 0$ l'espace $\mathrm{Sym}^k(X)$ contient exactement un point et $N(f)$ prend la valeur 1 en ce point.

THÉORÈME 7 (Cas simple). – *Soient Z un espace complexe, $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de n-cycles de Z et Y un pôle pour la famille* [10]. *Supposons $Y \subset Z$ localement intersection complète relative de codimension $n+1$ dans Z et notons Σ son lieu polaire. Alors il existe un unique diviseur de Cartier effectif Σ_Y dans S tel que $|\Sigma_Y| = |\Sigma|$, déterminé par la construction suivante : soit $s_0 \in S$ et soit U un voisinage ouvert et relativement compact de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ dans Z; soit $\widetilde{Y}$ localement intersection complète relative de codimension n d'un voisinage ouvert de $\overline{U}$ qui vérifie :*

–$Y \subset \widetilde{Y}$ au voisinage de $\overline{U}$;

–$|\widetilde{Y}| \cap |X_{s_0}| \cap U = |Y| \cap |X_{s_0}| \cap U$ et $|\widetilde{Y}| \cap |X_{s_0}| \cap \partial U = \emptyset$;

–il existe f dans $\mathcal{O}(\overline{U})$ engendrant l'idéal de Y dans $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ au voisinage de $\overline{U}$.

Alors, dans un voisinage de s_0, le diviseur Σ_Y est défini par la fonction analytique sur S donnée par

$$s \mapsto N(f)(X_s \cap \widetilde{Y} \mid U).$$

Remarque 4. – Dans le cas Z lisse le lecteur est renvoyé à [B1] pour la définition de $X_s \cap \widetilde{Y} \mid U$ et la démonstration du fait que les $X_s \cap \widetilde{Y}|U$ forment une famille analytique de 0-cycles dans U. Le cas où Z est un espace complexe quelconque n'est pas vraiment différent pourvu que $\widetilde{Y} \subset Z$ soit localement intersection complète relative ; la définition de l'intersection $X_s \cap \widetilde{Y}|U$ dans ce cadre mérite quand même quelques explications qui seront données au n° 2 de l'appendice.

Démonstration. – Si U, $\widetilde{Y}$, f et s_0 sont comme dans l'énoncé du théorème, on dira que le triplet $(U, \widetilde{Y}, f)$ est *adapté* au point s_0.

Montrons d'abord que pour tout s_0 dans S il existe un triplet adapté à s_0. On peut supposer que $s_0 \in |\Sigma|$ car le cas $s_0 \notin |\Sigma|$ est trivial. L'ensemble $|X_{s_0}| \cap |Y|$ étant fini et Y étant localement intersection complète relative dans Z, il existe un voisinage ouvert U' de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ et $f_0, \dots, f_n \in \Gamma(U', \mathcal{I}_Y)$ qui engendrent $\mathcal{I}_Y|U'$, où $\mathcal{I}_Y$ est l'idéal de définition de Y. L'application $U' \to \mathbb{C}^{n+1}$ donnée par

$$x \mapsto \big(f_0(x), \dots, f_n(x)\big)$$

est plate au voisinage de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ et $Y \cap U'$ est sa fibre au-dessus de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Quitte à rétrécir U', elle induit une application plate et surjective $F : U' \to V$, où V est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, telle que $F|_{|X_{s_0}|} : |X_{s_0}| \to V$ soit finie. Il s'ensuit que $F_*(X_{s_0})$ est bien défini comme diviseur de V. Prenons une droite ℓ passant par l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ telle que $\ell \cap F_*(X_{s_0})$ soit fini et posons $\widetilde{Y} := F^*\ell$. Choisissons un voisinage ouvert W de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $|W \cap \ell \cap F_*(X_{s_0})| = \{0\}$ et prenons pour U un voisinage ouvert et relativement compact de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ dans $F^{-1}(W)$. Soit

[10] Cela signifie que Y est un pôle pour l'équerre associée à la famille; c'est-à-dire que l'image réciproque de Y sur le graphe est finie sur S et que $\pi(Y)$ est d'intérieur vide dans S.

$h : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique qui induit une coordonnée centrée à l'origine de ℓ. Si on pose $f := h \circ F$, alors le triplet $(U, \widetilde{Y}, f)$ est adapté à s_0.

Soit $(U, \widetilde{Y}, f)$ un triplet adapté à s_0. Montrons que $(U, \widetilde{Y}, f)$ est adapté à s pour tout s assez voisin de s_0. Notons π et p les projections canoniques du graphe de la famille $(X_s)_{s\in S}$ sur S et Z respectivement. Comme le morphisme $\pi|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \to S$ est fini, l'ensemble $\pi\big(p^{-1}(Y \setminus Y \cap U)\big)$ est fermé dans S et ne contient pas s_0 et pour tout s dans l'ouvert complémentaire, on a $|X_s| \cap |Y| \subseteq U$. Les conditions $|\widetilde{Y} \cap X_s| \cap \overline{U}$ fini et $|\widetilde{Y} \cap X_s| \cap \partial U = \emptyset$ sont vérifiées pour tout s assez voisin de s_0 car $\overline{U}$ est compact. Cela implique qu'il existe un voisinage S' de s_0 dans S tel que $(U, \widetilde{Y}, f)$ soit adapté à s pour tout s dans S'. De plus, on obtient que $(X_s \cap \widetilde{Y} \mid U)_{s\in S'}$ est une famille analytique de cycles dans $\mathrm{Sym}^k(U)$ pour un certain k (voir [B1] et l'appendice). Il s'ensuit que la fonction $s \mapsto N(f)(X_s \cap \widetilde{Y} \mid U)$ est bien définie et analytique. Elle engendre un $\mathcal{O}_{S'}$-idéal $\mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{S'}/\mathcal{I}) = |\Sigma| \cap S'$. La démonstration du théorème consiste donc à prouver que $\mathcal{I}_{s_0}$ est indépendant du choix de triplet adapté à s_0. Cette démonstration étant assez technique sera donnée au paragraphe 2.

□

Avant d'énoncer le cas général du théorème 7, on va introduire deux notions.

DÉFINITION 6

1) *On dira qu'une équerre* $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ *sur* S *avec* $p : \widetilde{Z} \to Z$ *est* de dimension pure *si* S *et* Z *(et par conséquent* $\widetilde{Z}$ *aussi) sont de dimensions pures.*

2) *Soit une* n*-équerre de dimension pure* $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ *sur* S *avec* $p : \widetilde{Z} \to Z$ *et soit* $Z_1 \subset Z$ *localement intersection complète relative de codimension* d*. Si* $|\pi^{-1}(s)| \cap p^{-1}(|Z_1|)$ *est de dimension* $n-d$ *pour tout* s *dans* S*, alors on pose* [11]

$$\mathcal{E} \cap Z_1 := \big(\pi|_{p^{-1}(Z_1)}, \widetilde{X}._{\tilde{p}} Z_1, p_1\big),$$

où $\tilde{p} : S \times \widetilde{Z} \to Z$ *est le composé de la projection canonique* $S \times \widetilde{Z} \to \widetilde{Z}$ *suivi de* p *et où* $p_1 : p^* Z_1 \to Z_1$ *est le morphisme induit par* p*. On dira que la* $(n-d)$*-équerre* $\mathcal{E} \cap Z_1$ *est* l'intersection de $\mathcal{E}$ avec Z_1.

THÉORÈME 7 (Cas général). – *À la donnée de :*

–une n*-équerre de dimension pure* $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ *sur* S *avec* $p : \widetilde{Z} \to Z$*,*

–un pôle Y *pour* $\mathcal{E}$ *localement intersection complète relative dans* Z *de codimension* $n+1$*, on associe un diviseur de Cartier effectif* $\Sigma(\mathcal{E}, Y)$ *dans* S *de support* $|\Sigma|$*, où* Σ *est le lieu polaire de* $(\mathcal{E}, Y)$*. Cette correspondance vérifie les propriétés suivantes :*

1) *Si* $\mathcal{E} = \big(\pi, \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})\sharp\mathbb{C}, p\big)$ *est l'équerre associée à la famille universelle sur* $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})$ *et* Y *est l'origine (réduite) de* $\mathbb{C}$*, alors le diviseur* $\Sigma(\mathcal{E}, Y)$ *est défini par la* k*-ième fonction symétrique élémentaire* $s_k : \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

2) (Changement de base) *Si* $\lambda : T \to S$ *est un morphisme d'espaces complexes tel que* $\lambda^{-1}(|\Sigma|)$ *soit d'intérieur vide dans* T*, alors* Y *est un pôle pour* $\lambda^*\mathcal{E}$ *et*

$$\lambda^*\Sigma(\mathcal{E}, Y) = \Sigma(\lambda^*\mathcal{E}, Y).$$

[11] Pour la définition de $\widetilde{X}._{\tilde{p}} Z_1$, voir le n° 2 de l'appendice

3) (Restriction) *Pour W un ouvert de $\widetilde{Z}$ tel que Y soit un pôle pour $\mathcal{E}|W$, on a*

$$\Sigma(\mathcal{E}, Y) = \Sigma(\mathcal{E}|W, Y)$$

sur l'ouvert $S_W := \{s \in S : \pi^{-1}(s) \cap p^{-1}(Y) \subseteq W\}$.

4) (Image directe) *Soit un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \widetilde{W} \arrow[r, "q"] \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] & Z \\ & S & & \end{tikzcd}$$

d'espaces complexes avec f propre et surjectif, $\tilde{\pi}$ équidimensionnel et $p = q \circ f$. Alors $\Sigma(\mathcal{E}, Y) = \Sigma(f_*\mathcal{E}, Y)$ où $f_*\mathcal{E} = (\tilde{\pi}, f_*\widetilde{X}, q)$.

5) *Soit Z' localement intersection complète relative de codimension (pure) $\leq n$ dans Z contenant Y telle que Y soit localement intersection complète relative dans Z' et telle que l'équerre $\mathcal{E} \cap Z'$ soit bien définie. Alors Y est un pôle pour $\mathcal{E} \cap Z'$ et*

$$\Sigma(\mathcal{E} \cap Z', Y) = \Sigma(\mathcal{E}, Y).$$

6) *Si $q : Z \to Z_1$ est un morphisme plat d'espaces complexes et $Y_1 \subset Z_1$ est localement intersection complète relative telle que $q^*Y_1 = Y$, alors*

$$\Sigma(\mathcal{E}_1, Y_1) = \Sigma(\mathcal{E}, Y),$$

où $\mathcal{E}_1 = (\pi, \widetilde{X}, q \circ p)$.

De plus, les propriétés 1 *à* 6 *caractérisent cette correspondance.*

Remarque 5. – Comme nous l'a fait remarquer le rapporteur, l'hypothèse de pureté de dimension pour l'équerre $\mathcal{E}$ n'est probablement pas utile dans le théorème 7 (cas général). Cependant, la considération d'intersection d'équerre (propriété 5) conduirait, sans cette hypothèse, aux difficultés signalées à la remarque 1 qui suit la définition d'une pondération géométrique (au début du chapitre I). Là encore, le gain en généralité nous semble faible par rapport à l'alourdissement du texte, et nous laissons à l'utilisateur de cette généralisation le soin de se convaincre qu'elle ne présente que des « difficultés d'écriture »

Pour la démonstration du théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 8. – *Soit $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ une n-équerre sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$. Soit Y un pôle pour $\mathcal{E}$ et soit Σ le lieu polaire de $(\mathcal{E}, Y)$. Alors, quel que soit s_0 dans S, il existe des voisinages ouverts S' de s_0 dans S, W de $|\widetilde{X}_{s_0}| \cap p^{-1}(|Y|)$ dans $\widetilde{Z}$ et U de $p\Big(|\widetilde{X}_{s_0}|\Big) \cap |Y|$ dans Z tels que $\pi^{-1}(s) \cap p^{-1}(|Y|) \subseteq W$ et $p_*(\widetilde{X}_s \mid W)$ soit bien défini* (en tant que n-cycle dans U) *pour tout s dans S' et que $\big(p_*(\widetilde{X}_s \mid W)\big)_{s \in S'}$ soit une famille analytique de n-cycles dans U.*

Démonstration. – Soit s_0 dans S. Considérons le morphisme

$$(\pi, p) : \widetilde{Z} \to S \times Z.$$

Quel que soit y dans $p(|\widetilde{X}_{s_0}|) \cap |Y|$, la fibre $(\pi, p)^{-1}(s_0, y) = |\widetilde{X}_{s_0}| \cap p^{-1}(y)$ est finie et, par conséquent, il existe des voisinages ouverts $S_y \times U_y$ de (s_0, y) dans $S \times Z$ et W_y de $(\pi, p)^{-1}(s_0, y)$ dans $\widetilde{Z}$ tels que le morphisme

$$(\pi, p)|_{W_y} : W_y \to S_y \times U_y$$

soit fini. On peut prendre les U_y deux à deux disjoints et les S_y tous égaux au même voisinage S'' de s_0. On obtient alors un morphisme fini

$$(\pi, p)|_{W'} : W' \to S'' \times U$$

où U désigne la réunion des U_y et W' désigne la réunion des W_y. Or

$$\pi[p^{-1}(Y) - W' \cap p^{-1}(Y)]$$

est un fermé de S qui ne contient pas le point s_0; donc

$$S' := S'' \cap \big(S - \pi[p^{-1}(Y) - W' \cap p^{-1}(Y)]\big)$$

est un voisinage ouvert de s_0 dans S tel que $\pi^{-1}(s) \cap p^{-1}(Y) \subseteq W'$ pour tout s dans S'. Alors pour $W := W' \cap \pi^{-1}(S')$ le morphisme $(\pi, p)|_W : W \to S' \times U$ est fini. En particulier $p|_{|\widetilde{X}_s| \cap W} : |\widetilde{X}_s| \cap W \to U$ est fini pour tout s dans S' et d'après [B1, chapitre IV] cela implique que $p_*(X_s|W)$ est bien défini (comme n-cycle dans U) pour tout s dans S' et que $\big(p_*(\widetilde{X}_s \mid W)\big)_{s \in S'}$ est une famille analytique de n-cycles dans U.

□

Démonstration (Théorème 7 (cas général)). – Soit s_0 dans S et choisissons des ouverts S', W et U comme dans le lemme ci-dessus. Notons $\Sigma_{S'}$ le diviseur de Cartier (unique) dans S' défini par la famille analytique $\big(p_*(\widetilde{X}_s \mid W)\big)_{s \in S'}$ d'après le théorème 7 (cas simple). De cette façon, on obtient un recouvrement ouvert $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de S où chaque ouvert S_λ est muni d'un diviseur de Cartier, et grâce à l'unicité de ces diviseurs, ils se recollent en un diviseur de Cartier $\Sigma(\mathcal{E}, Y)$ de S. Montrons que la correspondance vérifie les propriétés 1) à 6) :

1) Soit z la coordonnée locale de $\mathbb{C}$; alors Y est donné par l'équation $z = 0$ et il suffit de remarquer que $N(z)$ n'est autre que la k-ième fonction symétrique élémentaire

$$s_k : \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}.$$

Pour montrer que les autres propriétés sont vérifiées, on peut supposer, grâce au lemme ci-dessus, que $(p_*\widetilde{X}_s)_{s \in S}$ est une famille analytique de n-cycles de Z, qu'il existe $\widetilde{Y} \subset Z$ localement intersection complète relative qui contient Y, et que Y est défini dans $\widetilde{Y}$ par une fonction globale $f : \widetilde{Y} \to \mathbb{C}$.

2) Le diviseur $\Sigma(\mathcal{E}, Y)$ est défini par la fonction sur S

$$\sigma : s \mapsto N(f)(\widetilde{Y} \cap p_*\widetilde{X}_s)$$

et le diviseur $\Sigma(\lambda^*\mathcal{E}, Y)$ est défini par la fonction sur T

$$t \mapsto N(f)(\widetilde{Y} \cap p_*\widetilde{X}_{\lambda(t)}) = \sigma\big(\lambda(t)\big) = (\lambda^*\sigma)(t).$$

3) Évident.

4) On a $p_*\widetilde{X}_s = q_*(f_*\widetilde{X}_s)$ pour tout s.

5) Dans le cas simple du théorème 7 nous avons vu [12] que la structure de diviseur de Cartier ne dépend pas du choix de $\widetilde{Y}$. Quitte à rétrécir, on peut supposer Z' intersection complète relative dans Z et $\widetilde{Y}$ intersection complète relative dans Z'. Le résultat est donc une conséquence de la transitivité de l'intersection (voir proposition A.3 dans l'appendice).

6) Encore grâce au lemme ci-dessus, on peut supposer que $q_*(p_*\widetilde{X}_s)$ est une famille analytique de cycles de Z_1 et qu'il existe $\widetilde{Y}_1 \subset Z_1$ intersection complète relative qui contient Y_1 comme hypersurface donnée par une fonction analytique globale $f_1 : \widetilde{Y}_1 \to \mathbb{C}$ telle que $\widetilde{Y} = q^*\widetilde{Y}_1$. Alors l'égalité des diviseurs $\Sigma(\mathcal{E}, Y) = \Sigma(\mathcal{E}_1, Y_1)$ est équivalente, pour tout s dans S, à l'égalité

$$N(f_1)\big(q_*(p_*\widetilde{X}_s) \cap \widetilde{Y}_1\big) = N(f)(p_*\widetilde{X}_s \cap \widetilde{Y}).$$

Or d'après la « formule de projection » (voir proposition A.4 dans l'appendice), on a

$$q_*(p_*\widetilde{X}_s \cap q^*\widetilde{Y}_1) = q_*(p_*\widetilde{X}_s) \cap \widetilde{Y}_1.$$

Il s'ensuit que, pour tout s, on a

$$\begin{aligned} N(f)(p_*\widetilde{X}_s \cap \widetilde{Y}) &= \big(N(f_1) \circ \mathrm{Sym}^k(q)\big)(p_*\widetilde{X}_s \cap q^*\widetilde{Y}_1) \\ &= N(f_1)\big(q_*(p^*\widetilde{X}_s \cap q^*\widetilde{Y}_1)\big) \\ &= N(f_1)\big(q_*(p^*\widetilde{X}_s) \cap \widetilde{Y}_1\big). \end{aligned}$$

Pour montrer que les six propriétés caractérisent la correspondance, on se donne une n-équerre $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$, muni d'un pôle $Y \subset Z$ localement intersection complète relative, et on se propose de montrer que les six propriétés déterminent le diviseur $\Sigma(\mathcal{E}, Y)$.

Soit s_0 dans le lieu polaire Σ de $(\mathcal{E}, Y)$. Prenons un voisinage ouvert V de $p(|\widetilde{X}_{s_0}|) \cap |Y|$ tel que $Y \cap V$ soit la fibre d'un morphisme plat $F : V \to \mathbb{C}^{n+1}$ au-dessus de l'origine. Effectuons respectivement les opérations suivantes : localisation par rapport à $p^{-1}(V)$ (voir n° 3), changement de base $S_{p^{-1}(V)} \hookrightarrow S$ (voir n° 2) et remplacement de Z par l'ouvert $F(Z)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ et de Y par l'origine réduite (voir n° 6). Comme ces trois opérations n'ont pas changé le diviseur $\Sigma(\mathcal{E}, Y)$ au voisinage de s_0, on peut dorénavant supposer que $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ est une n-équerre sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$ où Z est un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et $Y = \{0\}$ est un pôle pour $\mathcal{E}$.

La fibre du morphisme $(\pi, p) : \widetilde{Z} \to S \times Z$ au-dessus de $(s_0, 0)$ étant finie, on peut, quitte à rétrécir, en appliquant les n° 2 et 3, supposer qu'il est propre. Alors, d'après le n° 4, on peut remplacer $\mathcal{E}$ par $(\pi, p)_*\mathcal{E}$ qui est l'équerre de la famille analytique $(p_*\widetilde{X}_s)_{s \in S}$ de diviseurs dans Z. En rétrécissant encore et en appliquant les n° 2 et 3, on se ramène au cas où $\mathcal{E}$ est l'équerre d'une famille analytique de revêtements ramifiés, d'un certain degré k, de U dans $U \times D$, où U est un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ centré à l'origine et D est un disque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Notons $f : S \times U \to \mathrm{Sym}^k(D)$ l'application analytique correspondante.

Le sous-espace $Z' := \{0\} \times D$ de $U \times D$ est une intersection complète et l'équerre $\mathcal{E} \cap Z'$ est bien définie, d'où $\Sigma(\mathcal{E}, \{0\}) = \Sigma(\mathcal{E} \cap Z', \{0\})$, d'après le n° 5. Or $\mathcal{E} \cap Z'$ est l'équerre de

[12] Ou plutôt nous le verrons au paragraphe 2.

la famille analytique de zéro-cycles de $\mathbb{C}$, donnée par l'application $\lambda : S \to \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})$ qui est définie par $\lambda(s) := f(s, 0)$. Il s'ensuit que $\mathcal{E} \cap Z' = \lambda^*\mathcal{E}_u$, où $\mathcal{E}_u = \big(\pi, \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})\sharp\mathbb{C}, p\big)$ est l'équerre associée à la famille universelle sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})$. D'après le n° 2 on obtient

$$\Sigma(\mathcal{E} \cap Z', \{0\}) = \Sigma(\lambda^*\mathcal{E}_u, \{0\}) = \lambda^*\Sigma(\mathcal{E}_u, \{0\}),$$

ce qui implique que $\Sigma(\mathcal{E} \cap Z', \{0\})$ est donné par la fonction $s_k \circ \lambda : S \to \mathbb{C}$ d'après le n° 1. $\square$

Dorénavant, on identifie systématiquement le diviseur de Cartier effectif Σ_Y avec l'hypersurface associée. Dans la situation du théorème 7 (cas général), on a les deux sous-espaces $\pi(p^*Y)$ et Σ_Y de S qui ont le même espace topologique sous-jacent. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le sous-espace $\pi(p^*Y)$ est indépendant de la pondération géométrique $\widetilde{X}$ de π tandis que la structure analytique de Σ_Y est définie au moyen de $\widetilde{X}$. D'autre part, le sous-espace Σ_Y ne dépend que de $\widetilde{Z}_{\mathrm{red}}$ et Z_{red} tandis que $\pi(p^*Y)$ dépend évidemment des structures analytiques de $\widetilde{Z}$ et Z. Dans le cas où $\widetilde{Z}$ est réduit, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 9. – *Soit $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ une n-équerre de dimension pure sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$, où $\widetilde{Z}$ est réduit et Y un pôle pour $\mathcal{E}$ localement intersection complète relative dans Z de codimension $n+1$. Alors $\pi(p^*Y)$ est un sous-espace de Σ_Y.*

La démonstration de la proposition 9 sera donnée au paragraphe 6.

Avant d'énoncer un corollaire de la proposition 9, fixons quelques notations. On note $\mathcal{M}$ le faisceau de fonctions méromorphes sur S. Pour ν un entier positif, on note $\mathcal{O}(\nu\Sigma_Y)$ le sous-faisceau de $\mathcal{M}$ engendré par les germes $\gamma^{-\nu}$ avec γ un générateur local de $\mathcal{I}_{\Sigma_Y}$, et on note $\mathrm{H}^n_\Psi(Z, \Omega^n_Z)[\nu Y]$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^n_\Psi(Z \setminus Y, \Omega^n_Z)$ formé des classes ayant un pôle d'ordre $\leq \nu$ le long de$Y$. Notons $L(\Sigma_Y)$ le fibré en droites sur S associé à Σ_Y et $L(\Sigma_Y)^\nu$ sa puissance tensorielle ν-ième. On rappelle que le $\mathcal{O}_S$-module des sections analytiques du fibré $L(\Sigma_Y)^\nu$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{O}(\nu\Sigma_Y)$.

COROLLAIRE 10. – *Soit $\mathcal{E} = (\pi, \widetilde{X}, p)$ une n-équerre de dimension pure sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$ et $Y \subset Z$ un pôle pour $\mathcal{E}$ localement intersection complète relative de codimension $n+1$. Soit Φ la famille de fermés F tels que $p^{-1}(F)$ soit π-propre et soit $\Psi := \Phi \cap (Z \setminus Y)$. Pour tout entier $\nu \geq 0$, l'intégration*

$$\int_{\mathcal{E}|Z\setminus Y} : \mathrm{H}^n_\Psi(Z \setminus Y, \Omega^n_Z) \to \mathrm{H}^0(S \setminus \Sigma_Y, \mathcal{O}_S)$$

induit une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\mathrm{H}^n_\Psi(Z, \Omega^n_Z)[\nu Y] \to \mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{O}_S(\nu\Sigma_Y)\big) \simeq \mathrm{H}^0\big(S, L(\Sigma_Y)^\nu\big).$$

Démonstration. – Comme ni le morphisme $\int_{\mathcal{E}|Z\setminus Y}$ ni l'hypersurface Σ_Y ne dépendent de la structure analytique de $\widetilde{Z}$, on peut supposer $\widetilde{Z}$ réduit. Posons $\Sigma := \pi(p^*Y)$ et rappelons que $|\Sigma| = |\Sigma_Y|$. D'après le théorème 4, le morphisme $\int_{\mathcal{E}|Z\setminus Y}$ respecte les filtrations définies par l'ordre des pôles le long de Y et Σ. Or, avec $\widetilde{Z}$ réduit, Σ est un sous-espace de Σ_Y d'après la proposition 9, et, par conséquent, le morphisme $\int_{\mathcal{E}|Z\setminus Y}$ respecte les filtrations définies par l'ordre des pôles le long de Y et Σ_Y (voir la remarque 3-1 qui suit le théorème 4). Cela veut dire qu'il envoie $\mathrm{H}^n_\Psi(Z,\Omega^n_Z)[\nu Y]$ dans $\mathrm{H}^0\big(S,\mathcal{O}_S(\nu\Sigma_Y)\big)$.

PROPOSITION 11. – *Soit $\mathcal{E}=(\pi,\widetilde{X},p)$ une n-équerre de dimension pure sur S avec $p:\widetilde{Z}\to Z$ et soit Θ un espace analytique réduit. Soit $\mathcal{Y}\subset\Theta\times Z$ une intersection complète locale relative de codimension $n+1$ dans $\Theta\times Z$ qui soit plate sur Θ. On suppose que $\mathcal{Y}$ est propre sur $\Theta\times S$ et que pour tout $\theta\in\Theta$, $\mathcal{Y}_\theta$ est un pôle pour la n-équerre $\mathcal{E}$ sur S. Alors il existe un diviseur de Cartier $\sigma\subset\Theta\times S$ qui est plat sur Θ et vérifie $\sigma_\theta=\Sigma_{\mathcal{Y}_\theta}$ pour tout θ dans Θ.*

Démonstration. – On considère sur l'espace analytique réduit $\Theta\times S$ la n-équerre $\widehat{\mathcal{E}}=(\mathrm{id}_\Theta\times\pi,\widehat{X},\mathrm{id}_\Theta\times p)$, où $\widehat{X}$ est la pondération canoniquement induite par $\widetilde{X}$. Alors $\mathcal{Y}\subset\Theta\times Z$ est un pôle pour $\widehat{\mathcal{E}}$ localement intersection complète et on applique le théorème 7.

On trouve ainsi un diviseur de Cartier $\sigma\subset\Theta\times S$ qui, par les changements de base $\{\theta\}\times S\hookrightarrow\Theta\times S$, donnera $\Sigma_{\mathcal{Y}_\theta}$ d'après la propriété 2 du théorème 7 (cas général). C'est donc le graphe de la famille $(\Sigma_{\mathcal{Y}_\theta})_{\theta\in\Theta}$. De plus σ est Θ-plat, car dans chaque fibre $\Sigma_{\mathcal{Y}_\theta}$, il est d'intérieur vide dans S.

Ceci complète la démonstration de la proposition 11.

□

Remarque 6. – Pour Y et S compacts, la proposition 11 permet de définir un morphisme du réduit de l'espace de Douady (voir [Do]) au voisinage de Y vers le réduit de l'espace des diviseurs de Cartier de S (qui est un ouvert de l'espace de Douady de S) sans hypothèse de compacité des cycles considérés, c'est-à-dire sans supposer le morphisme $\pi:\widetilde{Z}\to S$ propre. L'hypothèse de propreté de la proposition 11 est alors réalisée en prenant pour Θ un voisinage assez petit de Y dans l'espace de Douady.

6. Démonstration du théorème 7 (cas simple) et de la proposition 9

Démonstration (Théorème 7 (cas simple)). – Au paragraphe 5 on a ramené la démonstration à montrer que la structure de diviseur de Cartier est indépendante des choix effectués. Plus précisément : pour un point quelconque s_0 dans Σ, il faut montrer que tout triplet $(U,\widetilde{Y},f)$ adapté à s_0 définit le même idéal dans $\mathcal{O}_{S,s_0}$. Soit alors s_0 dans Σ et soit $(U,\widetilde{Y},f)$ un triplet adapté à s_0. Quitte à rétrécir U, on peut supposer qu'il existe des sections $f_1,\ldots,f_n$ dans $\Gamma(U,\mathcal{I}_Y)$ telles que $f_1,\ldots,f_n$ engendrent $\mathcal{I}_{\widetilde{Y}}\mid U$, telles que $f,f_1,\ldots,f_n$ engendrent $\mathcal{I}_Y\mid U$, et telles que l'application $F:U\to\mathbb{C}^{n+1}$ donnée par

$$z\mapsto\big(f(z),f_1(z),\ldots,f_n(z)\big)$$

soit plate. Alors l'image $V:=F(U)$ est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Comme $|Y|\cap|X_{s_0}|$ est fini, on peut (quitte à rétrécir encore) supposer la restriction de F à $|X_s|\cap U$ finie pour tout s dans un voisinage ouvert S' de s_0. D'après [B1], il en résulte que $\big(F_*(X_s\mid U)\big)_{s\in S'}$ est une famille analytique de n-cycles (c'est-à-dire diviseurs) de V. Pour alléger les notations on écrira X_s au lieu de $X_s|U$. Quitte à rétrécir V, on peut supposer que $(F_*X_s)_{s\in S'}$ est une famille analytique de n-cycles d'un voisinage ouvert de $\overline{V}$.

Notons $z_0,\ldots,z_n$ les coordonnées de $\mathbb{C}^{n+1}$ et notons $\ell_0,\ldots,\ell_n$ les axes de coordonnées. Alors $(U,\widetilde{Y},f)=(U,F^*\ell_0,z_0\circ F)$, et pour toute droite ℓ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$\ell \cap |F_*X_{s_0}| \cap \overline{V} = \{0\}$ et pour toute fonction analytique $h : V \to \mathbb{C}$ qui induit une coordonnée locale centrée à l'origine de ℓ, le triplet $(U, F^*\ell, h \circ F)$ est adapté à s_0.

Nous affirmons que tout triplet de cette forme définit le même idéal dans $\mathcal{O}_{S,s_0}$: d'après « la formule de projection » (voir l'appendice) et quitte à rétrécir S', on a, pour tout s dans S',

$$F_*(X_s \cap F^*\ell) = F_*X_s \cap \ell,$$

et comme $X_s \cap F^*\ell$ est fini, on a

$$F_*(X_s \cap F^*\ell) = \mathrm{Sym}^k(F)(X_s \cap F^*\ell)$$

pour un certain entier k. Il s'ensuit que

$$N(h \circ F)(X_s \cap F^*\ell) = [N(h) \circ \mathrm{Sym}^k(F)](X_s \cap F^*\ell) = N(h)(F_*X_s \cap \ell).$$

Il faut donc montrer que les deux fonctions $s \mapsto N(h)(F_*X_s \cap \ell)$ et $s \mapsto N(z_0)(F_*X_s \cap \ell_0)$ définissent le même idéal dans $\mathcal{O}_{S,s_0}$.

Le cas $\ell = \ell_0$ est clair car alors $h = u.z_0$ sur ℓ_0, avec u inversible au voisinage de l'origine.

Supposons donc $\ell \neq \ell_0$. Alors par changement de variables, on se ramène au cas où $\ell = \ell_1$ et $h = z_1$. Quitte à prendre pour V un polydisque convenable et quitte à rétrécir S', les diviseurs F_*X_s sont donnés par $P_0(s,z)$ et $P_1(s,z)$, polynômes de Weierstrass par rapport à z_0 et z_1 (respectivement). Alors $N(z_0)(F_*X_s \cap \ell_0)$ est le produit des racines (en z_0) du polynôme

$$P_0(s, z_0, 0, \dots, 0),$$

c'est-à-dire $N(z_0)(F_*X_s \cap \ell_0) = (-1)^{d_0} P_0(s, 0, \dots, 0)$ où d_0 désigne le degré du polynôme. De même, on obtient $N(z_1)(F_*X_s \cap \ell_1) = (-1)^{d_1} P_1(s, 0, \dots, 0)$, où d_1 désigne le degré de P_1. Comme $P_0(s,z)$ et $P_1(s,z)$ définissent le même diviseur de $S \times \mathbb{C}^{n+1}$, à savoir le graphe de la famille $(F_*X_s)_{s \in S}$, il existe une fonction analytique $I : S \times V \to \mathbb{C}$ inversible au voisinage de $(s_0, 0)$ telle que $P_0(s,z) = I(s,z)P_1(s,z)$. Il s'ensuit que

$$N(z_0)(F_*X_s \cap \ell_0) = (-1)^{d_1 - d_0} I(s,0) N(z_1)(F_*X_s \cap \ell_1)$$

et par conséquent, que les deux triplets définissent le même idéal.

Dans la suite, nous utiliserons la notion suivante : soit $f_0, \dots, f_n$ un système de générateurs de $\mathcal{I}_Y$ dans un voisinage de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ et notons $\widetilde{Y}_j$ le sous-espace défini par la suite $f_0, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_n$. On dira que le système (ou la suite régulière) $f_0, \dots, f_n$ est *en position générale vis-à-vis* du cycle X_{s_0} s'il existe un voisinage ouvert et relativement compact U de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ tel que le triplet $(U, \widetilde{Y}_j, f_j)$ soit adapté à s_0 pour tout j dans $\{0, \dots, n\}$. On remarque qu'alors tous ces triplets définissent le même idéal dans $\mathcal{O}_{S,s_0}$ d'après ce qu'on vient de voir. On remarque également que *chaque triplet adapté à s_0 peut se définir par une suite régulière qui est en position générale vis-à-vis du cycle X_{s_0}, quitte à germifier le long de $\widetilde{Y}$ et à remplacer f par une fonction ayant même restriction sur $\widetilde{Y}$.*

Pour compléter la démonstration du théorème, remarquons que si $(U, \widetilde{Y}, f)$ et $(U, \widetilde{Y}, g)$ sont adaptés à s_0, alors f/g est analytique et inversible sur $\widetilde{Y}$. Il s'ensuit que les fonctions

$s \mapsto N(f)(X_s \cap \widetilde{Y})$ et $s \mapsto N(g)(X_s \cap \widetilde{Y})$ définissent le même idéal dans $\mathcal{O}_{S,s_0}$ et la démonstration s'achève en démontrant le lemme suivant :

LEMME 12. – *Soient U un voisinage ouvert de $|X_{s_0}| \cap |Y|$, et soient $(f_0, \ldots, f_n)$ et $(g_0, \ldots, g_n)$ deux systèmes de générateurs de $\mathcal{I}_Y$ dans U en position générale vis-à-vis du cycle X_{s_0}. Alors, quitte à rétrécir U, il existe une suite finie de systèmes de $n+1$ générateurs de $\mathcal{I}_Y$ dans U en position générale vis-à-vis du cycle X_{s_0} tels que deux systèmes consécutifs ne diffèrent que par un seul terme.*

Démonstration. – Écrivons $F := (f_0, \ldots, f_n)$ et $G := (g_0, \ldots, g_n)$ et considérons le sous-ensemble Ω dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1}) \times \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})$ formés des couples (λ, μ) tels que $\lambda F + \mu G$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}_Y$ aux points de $|X_{s_0}| \cap |Y|$ en position générale vis-à-vis du cycle X_{s_0}.

Il suffit de montrer que Ω est un ouvert de Zariski dense de $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2$. Car ceci étant, Ω est un ouvert connexe de l'espace vectoriel $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2$ et, par conséquent, on peut relier le point $(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n+1}}, 0)$ au point $(0, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n+1}})$ dans Ω par une ligne polygonale dont chaque côté est parallèle à un axe de coordonnées dans $\left(\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})\right)^2$. Les sommets de cette ligne polygonale donnent alors les systèmes de générateurs en question. Comme Ω n'est pas vide, il ne reste qu'à vérifier que Ω est un ouvert de Zariski.

Soit $\mathcal{J}$ l'idéal sur $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times U$ engendré par les fonctions coordonnées de l'application

$$[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times U \to \mathbb{C}^{n+1}\,; (\lambda, \mu, z) \mapsto (\lambda F + \mu G)(z).$$

Soit $p : [\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times U \to U$ la projection canonique, et posons $T := \mathrm{Supp}(p^*\mathcal{I}_Y / \mathcal{J})$. Alors T est un fermé de Zariski dans $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times U$, et comme l'ensemble $|Y| \cap |X_{s_0}|$ est fini, la projection de $T \cap \left([\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times |Y| \cap |X_{s_0}|\right)$ sur $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2$ est un fermé de Zariski.

Pour chaque j dans $\{0, \ldots, n\}$, on note $(\lambda F + \mu G)^j$ le n-uplet obtenu en enlevant la j-ième composante de $\lambda F + \mu G$. Soit Γ_j le sous-ensemble analytique de $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times (|X_{s_0}| \cap U)$ formé des points (λ, μ, z) tels que $(\lambda F + \mu G)^j(z) = 0$, et notons $q : \Gamma_j \to [\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2$ la projection canonique. Remarquons que $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times (|X_{s_0}| \cap Y) \subset \Gamma_j$. Posons

$$Z_j := \{(\lambda, \mu, z) \in \Gamma_j : \dim_{(\lambda,\mu,z)} q^{-1}(\lambda, \mu) > 0\}.$$

Alors Z_j est analytique fermé dans Γ_j. Comme $q^{-1}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n+1}}, 0) = \{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n+1}}, 0)\} \times (|X_{s_0}| \cap Y)$ est fini, $Z_j \cap \left([\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times (|X_{s_0}| \cap Y)\right)$ est analytique fermé d'intérieur vide dans $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2 \times (|X_{s_0}| \cap Y)$, ainsi que sa projection sur $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})]^2$.

On a donc démontré que Ω est le complémentaire d'une réunion finie de fermés de Zariski.

□

Démonstration Proposition 9. – La démonstration consiste à se ramener au cas d'une équerre associée à une famille analytique de 0-cycles dans un ouvert de $\mathbb{C}$ avec Y un point réduit de l'ouvert.

(i) Montrons d'abord qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où Z est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, où $Y = \{0\}$ est réduit, où $p_*\widetilde{X}_s$ est bien défini pour tout s dans S et où $(p_*\widetilde{X}_s)_{s \in S}$ est une famille analytique locale d'hypersurfaces dans Z, de sorte que $\widetilde{Z} \to S \times Z$ soit propre.

Soit s_0 dans S; prenons un voisinage ouvert U de $p(|\widetilde{X}_{s_0}|) \cap |Y|$ dans Z tel que $Y \cap U$ soit la fibre d'une application plate $F : U \to \mathbb{C}^{n+1}$. Le morphisme $\pi : \widetilde{Z} \to S$ étant ouvert, $\pi\big(p^{-1}(U)\big)$ est un voisinage ouvert de s_0 dans S. En appliquant le lemme 8 à l'équerre $\big(\pi \mid p^{-1}(U), \widetilde{X} \mid p^{-1}(U), F \circ p \mid p^{-1}(U)\big)$, on obtient une équerre $(\pi \mid W, \widetilde{X} \mid W, F \circ p \mid W)$ où W est un voisinage ouvert de $\pi^{-1}(s_0) \cap p^{-1}(|Y|)$ dans $\widetilde{Z}$, V est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et les $(F \circ p)_*(\widetilde{X}_s \mid W)$ forment une famille analytique locale dans V paramétrée par $S' := \pi(W)$. Comme $(p \mid W)^*(Y) = (F \circ p \mid W)^*(0)$, la définition de Σ_Y montre que cette équerre-là détermine les sous-espaces $\pi(p^*Y)$ et Σ_Y au voisinage de s_0.

(ii) Soit alors $(\pi, \widetilde{X}, p)$ une n-équerre sur S avec $p : \widetilde{Z} \to Z$, où Z est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, et supposons de plus que les $X_s := p_* \widetilde{X}_s$ forment une famille analytique locale d'hypersurfaces dans Z, paramétrée par S. Or, le diviseur de Cartier défini par l'équerre associé à la famille $(X_s)_{s \in S}$ coïncide avec celui défini par l'équerre $(\pi, \widetilde{X}, p)$. Notons Γ le support du graphe de la famille analytique $(X_s)_{s \in S}$ et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{p} & Z \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \searrow^{q} & \uparrow{\scriptstyle p_1} \\ S & \xleftarrow{\pi_1} & \Gamma \end{array}$$

où p_1 et π_1 sont les restrictions à Γ des projections canoniques de $S \times Z$ sur Z et S respectivement, et où l'existence et l'unicité du morphisme q sont dues au fait que $(\pi, p)(\widetilde{Z}) \subseteq \Gamma$ et que $\widetilde{Z}$ est réduit. Or, $\pi\big(p^*(0)\big) = \pi\Big(q^*\big(p_1^*(0)\big)\Big)$, et d'après le lemme 3, on sait que $\pi\Big(q^*\big(p_1^*(0)\big)\Big)$ est un sous-espace de $(\pi_1)\big(p_1^*(0)\big)$. Il suffit donc de démontrer la proposition dans le cas où $\widetilde{Z}$ est le support du graphe de la famille $(X_s)_{s \in S}$.

(iii) Supposons donc que $\widetilde{Z}$ soit le support du graphe de la famille $(X_s)_{s \in S}$. Quitte à rétrécir, on peut supposer de plus que $Z = U \times D$, avec U un polydisque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et D un disque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}$, et que $(X_s)_{s \in S}$ est la famille de revêtements ramifiés associée à un morphisme analytique $h : S \times U \to \mathrm{Sym}^k(D)$. Notons G l'image réciproque par $h \times \mathrm{id}_D$ de l'hypersurface universelle dans $\mathrm{Sym}^k(D) \times D$ (voir [B1, chapitre 0]). Alors la réduction de G est le support du graphe de la famille $(X_s)_{s \in S}$. Si on note encore π et p les restrictions à G des projections canoniques de $S \times Z$ sur S et Z respectivement, alors $\widetilde{X}$ est une pondération géométriquement plate de $\pi : G \to S$ et l'équerre $(\pi, \widetilde{X}, p)$ définit le même Σ_Y qu'avant. D'autre part, le sous-espace $\pi\big(p^*(0)\big)$ est éventuellement plus grand que le sous-espace correspondant défini par l'ancienne équerre. Il suffit donc de démontrer la proposition dans le cas où $\widetilde{Z} = G$. Ceci étant, on prend $\widetilde{Y} = \{0\} \times D$ et par intersection, on obtient la famille analytique $(X_s \cap \widetilde{Y})_{s \in S}$ de zéro-cycles dans D en identifiant $\{0\} \times D$ avec D. Cette famille correspond au morphisme analytique $g : S \to \mathrm{Sym}^k(D)$ défini par $g(s) = h(s, 0)$.

Soit $i : S \times D \to S \times U \times D$ l'application donnée par $i(s, z) = (s, 0, z)$. Alors $g \times \mathrm{id}_D = (h \times \mathrm{id}_D) \circ i$ et $i^* \widetilde{Z}$ est l'image réciproque par $g \times \mathrm{id}_D$ de l'hypersurface universelle dans $\mathrm{Sym}^k(D) \times D$. Comme $i^* \widetilde{Z}$ s'identifie naturellement avec le sous-espace $p^*(\{0\} \times D)$ de $\widetilde{Z}$, on obtient l'égalité $\pi\big(p^*(0)\big) = (\pi | i^* \widetilde{Z})\big(p^*(0)\big)$ et on veut démontrer que cet espace est contenu dans l'hypersurface Σ_Y définie par la fonction analytique $N(\mathrm{id}_D) \circ g : S \to \mathbb{C}$. Pour cela, il suffit de démontrer le lemme suivant :

LEMME 13. – *Soit D un disque ouvert centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Soient k un entier positif et $h : S \to \mathrm{Sym}^k(D)$ une application analytique. Soit $\widetilde{Z}$ l'image réciproque par $h \times \mathrm{id}_D$ de l'hypersurface universelle de $\mathrm{Sym}^k(D) \times D$ et notons π et p les restrictions à $\widetilde{Z}$ des projections canoniques de $S \times D$ sur S et D respectivement. Alors le sous-espace $\pi\big(p^*(0)\big)$ de S est contenu l'hypersurface définie par la fonction analytique $N(i_D) \circ h : S \to \mathbb{C}$, où $i_D : D \hookrightarrow \mathbb{C}$ est l'injection canonique.*

Démonstration. – Notons $x = (x_1, \ldots, x_k)$ le point courant de $\mathrm{Sym}^k(D)$ et z celui de D. Alors l'hypersurface universelle $\mathrm{Sym}^k(D) \sharp D$ de $\mathrm{Sym}^k(D) \times D$ est donnée par l'équation $z^k - s_1(x) z^{k-1} + \cdots + (-1)^k s_k(x) = 0$, où $s_1, \ldots, s_k$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Z} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Sym}^k(D)\sharp D \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi'"] & D \\
S \arrow[r, "h"] & \mathrm{Sym}^k(D) \arrow[r, "N(i_D)"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

où q et π' sont les restrictions à $\mathrm{Sym}^k(D) \sharp D$ des projections de $\mathrm{Sym}^k(D) \times D$ sur D et $\mathrm{Sym}^k(D)$ respectivement, et où H est le morphisme induit par $h \times \mathrm{id}_D$. Alors $q \circ H = p$ et, d'après le lemme 3, on sait que l'espace $\pi\big(p^*(0)\big) = \pi\Big(\mathrm{H}^*\big(q^*(0)\big)\Big)$ est un sous-espace de $\mathrm{H}^*\pi'\big(q^*(0)\big)$. Or, $q^*(0)$ est le sous-espace de $\mathrm{Sym}^k(D) \times D$ donné par les deux équations $z^k - s_1(x) z^{k-1} + \cdots + (-1)^k s_k(x) = 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire par les équations $s_k(x) = 0$ et $z = 0$. Cela implique que le sous-espace $\pi'\big(q^*(0)\big)$ de $\mathrm{Sym}^k(D)$ est donné par l'équation $s_k(x) = N(\mathrm{i}_D)(x) = 0$ et, par conséquent, $\mathrm{H}^*\pi'\big(q^*(0)\big)$ est donné par l'équation $\big(N(\mathrm{i}_D) \circ h\big)(s) = N(\mathrm{i}_D)\big(h(s)\big) = 0$ dans S. Cela complète la démonstration de la proposition 9.

□

Appendice

1. Multiplicité d'un point dans un cycle

Soient n, k et p des entiers positifs ou nuls. Pour x dans $\mathbb{C}^p$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ dans $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$, on appelle *multiplicité de x* dans $(x_1, \ldots, x_k)$ le nombre de fois que x est répété dans le k-uplet $(x_1, \ldots, x_k)$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit $f : U \to \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ une application holomorphe classifiant un revêtement ramifié X_f dans $U \times \mathbb{C}^p$. Pour $z = (t, x)$ dans $U \times \mathbb{C}^p$, on définit la *multiplicité de z dans le revêtement ramifié X_f*, noté $\mathrm{mult}_z(X_f)$, comme étant la multiplicité de x dans le k-uplet $f(t)$. On remarquera que ceci dépend effectivement de la projection considérée et pas seulement du cycle sous-jacent.

Soit X un cycle dans un espace complexe Z. Pour toute écaille E adaptée à X (voir [B1, chapitre I]), on note X_E le revêtement ramifié associé à X dans E. Pour z dans Z on pose

$$\mathrm{mult}_z(X) := \min_E \mathrm{mult}_z(X_E),$$

où E décrit les écailles adaptées à X en z, et on l'appelle *la multiplicité du point z dans le cycle X*. On remarque que pour tout z dans Z il existe une écaille adaptée à X en z telle que $\text{mult}_z(X) = \deg_E(X)$.

On voit facilement que pour Y un sous-ensemble analytique de dimension pure n d'un ouvert V de $\mathbb{C}^{n+p}$ et z dans V, l'entier $\text{mult}_z(Y)$ n'est autre que la multiplicité d'intersection en z de Y avec le p-plan générique passant par z dans $\mathbb{C}^{n+p}$. Pour un cycle $X = \Sigma n_j X_j$ on a $\text{mult}_z(X) = \Sigma\, n_j \text{mult}_z(X_j)$ et pour z générique dans X_j on a $\text{mult}_z(X) = n_j$.

Soit U un polydisque ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^n$ et soit X un revêtement ramifié d'un voisinage V de $\overline{U}$ contenu dans $V \times \mathbb{C}^p$ défini par une application holomorphe $f : V \to \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$. Notons $L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n)$ l'espace vectoriel des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^n$. Pour U' un ouvert non-vide et relativement compact dans U, il existe un voisinage ouvert Γ de l'origine dans $L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n)$ tel que pour tout φ dans Γ la projection $\pi_\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$ définie par $\pi_\varphi(t, x) = t - \varphi(x)$ fasse de X un revêtement ramifié de degré k au-dessus de $\overline{U'}$, noté X_φ.

Il résulte alors de ce qui précède que si z dans $U \times \mathbb{C}^p$ vérifie $\pi_\varphi(z) \in U'$ pour tout φ dans Γ, alors la multiplicité de z dans le cycle associé à X est égal à $\min\{\text{mult}_z(X_\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$.

Démonstration (Proposition 2). – On peut évidemment supposer Z réduit. Pour chaque entier $m \geq 1$ on pose

$$F_m := \{(s, z) \in S \times Z : \text{mult}_z(X_s) \geq m\}.$$

Montrons que F_m est un sous-ensemble analytique. Soit (s_0, z_0) dans $S \times Z$ et soit $E = (U, B, j)$ une écaille adaptée à X_{s_0} en z_0 [13]; soit U' un ouvert relativement compact dans U tel que $p_U(j(z)) \in U'$, où $p_U : U \times B \to U$ est la projection canonique. Alors il existe un voisinage ouvert S' de s_0 dans S et un voisinage ouvert Γ de l'origine dans $L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n)$ tels que pour chaque (s, φ) dans $S' \times \Gamma$ la projection $\pi_\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$ définie par $\pi_\varphi(t, x) = t - \varphi(x)$ fasse de $(X_s)_E$ un revêtement ramifié de U' de degré $k := \deg_E X_{s_0}$. Notons

$$f : S' \times \Gamma \times U' \to \text{Sym}^k(B)$$

l'application holomorphe associée.

Or, le sous-ensemble de $\mathbb{C}^p \times \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ formé des couples $\big(x, (x_1, \ldots, x_k)\big)$ tels que la multiplicité de x dans $(x_1, \ldots, x_k)$ soit $\geq m$ est algébrique, donc donné comme l'ensemble des zéros d'une application polynomiale

$$\Delta_m : \mathbb{C}^p \times \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \to \mathbb{C}^N.$$

Alors (s, z) appartient à $F_m \cap \big(S' \times j^{-1}(U' \times B)\big)$ si et seulement si

$$\Delta_m\Big(p_B\big(j(z)\big), f\Big(s, \varphi, p_U\big(j(z)\big)\Big)\Big) = 0$$

pour tout φ dans Γ, où p_B et p_U sont les projections canoniques de $U \times B$ sur B et U respectivement. Cela montre bien que F_m est un sous-ensemble analytique de $S \times Z$. Ce qui achève la démonstration.

[13] Si $z_0 \notin |X_{s_0}|$ cela signifie que $j^{-1}(\overline{U} \times \overline{B}) \cap |X_{s_0}| = \emptyset$.

□

Soient S et Z des espaces complexes réduits et soit X un cycle de $S \times Z$ tel que la restriction de la projection canonique $\pi : |X| \to S$ soit équidimensionnelle. Dans le cas où S est normal il est démontré dans [B1] que X détermine une famille analytique de cycles $(X_s)_{s\in S}$ dont les supports sont les fibres (ensemblistes) de π [14]. Dans le cas où S n'est pas normal, X détermine alors une famille analytique de cycles au-dessus de l'ouvert dense des points normaux de S. Réciproquement, soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de cycles dans Z paramétrée par S. Dans le § 1 du chapitre I, on a expliqué comment la famille induit un cycle X de $S \times Z$, appelé le graphe de la famille. D'après ce qu'on vient de dire, le graphe détermine la famille au-dessus d'un ouvert dense, donc partout. Le résultat suivant montre que les multiplicités des cycles X_s se récupèrent d'une façon naturelle à partir du graphe pour tout s en dehors d'un sous-ensemble négligeable de S.

PROPOSITION A.1. – *Soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de n-cycles de Z paramétrée par l'espace complexe réduit S, et $X = \Sigma n_j X_j$ son graphe. Il existe un sous-ensemble négligeable Σ de S* [15] *tel que pour tout s dans $S \setminus \Sigma$ on a $X_s = \Sigma n_{s,k} X_{s,k}$, avec $n_{s,k} = n_j$ si la composante irréductible $X_{s,k}$ de $|X_s|$ vérifie $\{s\} \times X_{s,k} \subseteq X_j$.*

Démonstration. – Posons, pour tout j,

$$F_j := \{(s,z) \in X_j \mid \mathrm{mult}_z(X_s) > n_j\}.$$

Alors F_j est un sous-ensemble analytique d'intérieur vide de X_j et, par conséquent, $F := \bigcup_j F_j$ est un sous-ensemble analytique d'intérieur vide de $|X|$. Soit s dans S et $X_s = \Sigma n_{s,k} X_{s,k}$. Si $\{s\} \times X_{s,k}$ n'est pas contenu dans F, alors $(\{s\} \times X_{s,k}) \cap F$ est un sous-ensemble analytique d'intérieur vide de $\{s\} \times X_{s,k}$ et, pour tout j tel que $\{s\} \times X_{s,k} \subseteq X_j$, on obtient

$$n_{s,k} = \mathrm{mult}_z(X_s) = n_j$$

quand z est générique dans $X_{s,k}$.

Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que le sous-ensemble Σ de S formé de tous les points s tels que F contient une composante irréductible de $|X_s|$ est négligeable. Soit $\pi : |X| \to S$ la projection canonique. Vu la définition d'une famille analytique de cycles, π est une application ouverte. Il s'ensuit que

$$\dim_x X = \dim_x \pi^{-1}\big(\pi(x)\big) + \dim_{\pi(x)} S = n + \dim_{\pi(x)} S$$

pour tout x dans $\pi^{-1}\big(S \setminus \mathrm{sing}(S)\big)$.

Si $s \in S \setminus \mathrm{sing}(S)$ et F contient une composante irréductible de $\pi^{-1}(s)$ alors, pour chaque point x de cette composante, on obtient $\dim_x(\pi|_F)^{-1}(s) = n$ et, par conséquent,

$$\dim_x(\pi|_F)^{-1}(s) + \dim_s S = \dim_x X > \dim_x F.$$

Alors le morphisme $\pi|_F$ n'est pas plat en x.

Nous avons donc montré que $\Sigma \cap \big(S \setminus \mathrm{sing}(S)\big)$ est contenu dans l'image par π de l'ensemble des points où $\pi|_F$ n'est pas plat; cela implique que Σ est négligeable d'après [F].

---

[14] En fait on ne trouve dans [B1] que le cas d'une famille analytique de cycles compacts (voir théorème 4 dans chapitre 1), mais le cas général est analogue.

[15] C'est-à-dire Σ est contenu dans une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques, localement fermés, d'intérieur vide dans S. En particulier $S \setminus \Sigma$ est un sous-ensemble dense de S.

2. Intersection de cycles

Rappel (voir [B1, chapitre VI]). – Soient Z un espace complexe de dimension pure $n+p$, Z' une variété lisse de dimension $n'+p'$, et $f : Z \to Z'$ une application analytique. Si X est un n-cycle de Z et Y un n'-cycle de Z' tels que le sous-ensemble analytique $|X| \cap f^{-1}(|Y|)$ de Z soit de dimension (pure) $n-p'$, on construit un $(n-p')$-cycle de Z à support $|X| \cap f^{-1}(|Y|)$, noté $X._f Y$, qui coïncide avec $X \cap f^{-1}(Y)$ dans le cas où celui-ci est défini. De plus, cette construction se comporte bien vis-à-vis des familles analytiques; plus précisément : soient $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de n-cycles de Z et $(Y_t)_{t\in T}$ une famille analytique de n'-cycles de Z' telles que $|X_s| \cap f^{-1}(|Y_t|)$ soit de dimension (pure) $n-p'$ pour tout (s,t) dans $S \times T$; alors $(X_s ._f Y_t)_{(s,t)\in S\times T}$ est une famille analytique de $(n-p')$-cycles de Z.

On va maintenant envisager une situation un peu différente de celle décrite dans le rappel ci-dessus : soit $f : Z \to Z'$ un morphisme d'espaces complexes de dimensions (pures) $n+p$ et $n'+d$. Soient X un n-cycle de Z et $Y \subset Z'$ localement intersection complète relative de codimension d dans Z' tels que $|X| \cap f^{-1}(|Y|)$ soit de dimension $n-d$. On se propose de définir un $(n-d)$-cycle $X._f Y$ de support $|X| \cap f^{-1}(|Y|)$. Le caractère local du problème nous permet de supposer $Y \subset Z'$ intersection complète relative et on peut donc présenter Y comme la fibre au-dessus de l'origine d'une application analytique plate $F : Z' \to \mathbb{C}^d$. Alors on pose

$$X._f Y := X._{F\circ f}\{0\}.$$

Montrons que $X._f Y$ ne dépend pas du choix de l'application F. Soit $G : Z' \to \mathbb{C}^d$ une autre application analytique avec $Y = G^{-1}(0)$. Alors l'ensemble Ω dans $[\mathrm{End}(\mathbb{C}^d)]^2$ formés de tous les couples (λ, μ) tels que Y soit la fibre de $\lambda F + \mu G : Z' \to \mathbb{C}^d$ au-dessus de l'origine est un ouvert connexe (voir la démonstration du lemme 12). Pour montrer que $X._{F\circ f}\{0\} = X._{G\circ f}\{0\}$, il suffit de vérifier que $(X._{(\lambda F+\mu G)\circ f}\{0\})_{(\lambda,\mu)\in\Omega}$ est une famille analytique de $(n-d)$-cycles de Z : en effet tous les cycles de cette famille ont le même support et comme les multiplicités des composantes irréductibles du support sont localement constantes si la famille est analytique, tous les cycles sont égaux. Pour montrer que la famille est analytique, on suppose Z plongé dans une variété lisse, $j : Z \hookrightarrow Z_1$, et on considère le plongement $H : \Omega \times Z \to \Omega \times Z_1 \times \mathbb{C}^d$ donné par

$$H(\lambda, \mu, z) = \big(\lambda, \mu, j(z), (\lambda F + \mu(G) \circ f(z)\big).$$

Alors $H_*(\Omega \times X) \cap (\Omega \times Z_1 \times \{0\})$ est le graphe d'une famille analytique de $(n-d)$-cycles de $Z_1 \times \mathbb{C}^d$. Cette famille est (modulo le plongement $Z \hookrightarrow Z_1 \times \mathbb{C}^d$) la famille $(X._{(\lambda F+\mu G)\circ f}\{0\})_{(\lambda,\mu)\in\Omega}$.

Énonçons une version relative de cette construction dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition A.2. – *Soit $f : Z \to Z'$ un morphisme d'espaces complexes de dimensions pures. Soient $(X_s)_{s\in S}$ une famille analytique de cycles de Z et $(Y_t)_{t\in T}$ une famille analytique plate d'intersections complètes locales relatives de Z' telles que $X_s ._f Y_t$ soit défini pour tout (s,t) dans $S \times T$. Alors $(X_s ._f Y_t)_{(s,t)\in S\times T}$ est une famille analytique de cycles de Z.*

Notation. – Dans le cas où $Z = Z'$ et $f = \mathrm{id}_Z$, on écrira $X \cap Y$ au lieu de $X._{\mathrm{id}_Z} Y$. On prendra garde qu'il ne s'agit pas là de l'intersection de deux cycles.

Terminons cet appendice en expliquant succintement deux formules utilisées dans l'article.

PROPOSITION A.3. – *Soit $f : Z \to Z'$ un morphisme d'espaces complexes de dimensions pures. Soit $Y \subset Z'$ localement intersection complète relative et $Y_1 \subset Y$ localement intersection complète relative. Alors, pour tout cycle analytique X dans Z, on a $X._f Y_1 = (X._f Y)._f Y_1$, pourvu que les deux membres soient bien définis.*

Démonstration. – Le problème étant local, on se ramène au cas suivant : $Z = Z' = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ avec n, p et q des entiers positifs ou nuls, U un polydisque centré à l'origine dans $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ où $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-r} \times \mathbb{C}^r$ avec $0 \leq r \leq n$, X est un revêtement ramifié de U dans $\mathbb{C}^{n-r} \times U$ classifié par l'application analytique $h : U \to \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^{n-r})$, $Y = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \times \{0\}$, $Y_1 = \mathbb{C}^n \times \{0\} \times \{0\}$. Alors la démonstration consiste à constater que la restriction de $h|_{U \cap (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p \times \{0\})}$ à $\mathbb{C}^r \times \{0\} \times \{0\}$ coïncide avec $h|_{\mathbb{C}^r \times \{0\} \times \{0\}}$. □

PROPOSITION A.4 (Formule de projection). – *Soit $f : Z \to Z'$ un morphisme d'espaces complexes de dimensions pures avec Z' lisse. Soient X un cycle de Z et Y un cycle de Z' tels que $f|_{|X|} : |X| \to Z'$ soit propre et génériquement finie sur chaque composante irréductible de $|X|$ et tels que $X._f Y$ soit défini. Alors $f_*(X._f Y) = f_* X \cap Y$.*

Quoique cette formule soit plus ou moins classique (voir [S], p. V-29, formule (10) pour le cas algébrique), nous donnons une esquisse de sa démonstration : vu la définition de $X._f Y$, on se ramène au cas où $Z = U \times Z'$, avec U un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et Z' un ouvert de $\mathbb{C}^k$, pour certains entiers m et k, et $f : U \times Z' \to Z'$ est la projection canonique. En appliquant le « moving lemma » de [B1, chapitre VI, proposition 2], on se ramène ensuite au cas où $f_* X$ et Y sont transverses et dans ce cas-là, la formule se démontre facilement. On conclut par prolongement analytique en utilisant les théorèmes d'intersections et d'images directes pour les familles analytiques (théorème 10 (local) et théorème 6 (local) respectivement des chapitres VI et IV de [B1]).

Remerciements

Les auteurs ont particulièrement apprécié le sérieux du travail effectué par le rapporteur et le remercient vivement de ses critiques et de ses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] D. BARLET, *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie*, (*Lecture Notes in Math.*, vol. 482, 1975, p. 1-158).

[B2] D. BARLET, *Majoration du volume des fibres génériques et théorème d'aplatissement géométrique*, Séminaire Lelong-Skoda 78/79, (*Lect. Notes Math.*, vol. 822, 1980, p. 1-17).

[B-V] D. BARLET et J. VAROUCHAS, *Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles*, (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 117, 1989, p. 327-341).

[C-VdW] W. L. CHOW et B. L. van der WAERDEN, *Zur algebraischen Geometrie IX*, (*Math. Ann.*, vol. 113, 1937, p. 692-704).

[De] P. DELIGNE, *Le déterminant de la cohomologie*, (*Contemp. Math.*, vol. 67, 1987, p. 93-177).

[Do] A. Douady, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*, (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 16, 1966, p. 1-98).

[Dous] L. Doustaing, *Comportement des singularités de classes de cohomologie par intégration sur les cycles analytiques*, Thèse soutenue à l'Université Paris VII le 01/02/1991, sous la direction de F. Norguet.

[E] R. Elkik, *Fibrés d'intersections et intégrales de classes de Chern*, (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ème série, vol. 22, 1989, p. 195-226).

[F] J. Frisch, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, (*Invent. Math.*, vol. 4, 1967, p. 118-138).

[G] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.

[K] M. Kaddar, *Classe fondamentale relative en cohomologie de Deligne et application*, (*Math. Ann.*, vol. 306, 1996, p. 285-322).

[L] P. Lelong, *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 85, 1957, p. 239-262).

[R] H. J. Reiffen, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger*, (*Math. Ann.*, vol. 164, 1966, p. 272-279).

[S] J-P. Serre, *Algèbre locale. Multiplicités*, (*Lect. Notes n° 11*, Springer Verlag, 1965).

(Manuscrit reçu le 20 juillet 1997;
accepté après révision le 4 juin 1998.)

D. Barlet
Université Henri Poincaré Nancy 1,
Institut Elie Cartan,
UMR 7502 CNRS, INRIA, UHP,
B.P. 239,
54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex, France.

J. Magnusson
Science Institut Dunhaga 3,
107 Reykjavik, Islande.