Ph. Ellia
A. Hirschowitz
L. Manivel

Problème de Brill-Noether pour les fibrés de Steiner. Applications aux courbes gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 32, nº 6 (1999), p. 835-857
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1999_4_32_6_835_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 32, 1999, p. 835 à 857.

PROBLÈME DE BRILL-NOETHER POUR LES FIBRÉS DE STEINER. APPLICATIONS AUX COURBES GAUCHES

PAR Ph. ELLIA, A. HIRSCHOWITZ ET L. MANIVEL

RÉSUMÉ. – Un fibré de Steiner sur l'espace projectif de dimension trois est un sous-fibré d'un fibré trivial, obtenu comme noyau d'un morphisme défini par une matrice de formes linéaires. Nous construisons des fibrés de Steiner E de rang n, de telle façon que $E(1)$ admette $n-1$ sections dont le lieu de dépendance soit une courbe lisse. © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – A Steiner bundle over the projective 3-space is the kernel in a trivial bundle of a morphism defined by a matrix of linear forms. We produce various Steiner bundles E of rank n such that $E(1)$ has $n-1$ sections, the dependency locus of which is a smooth curve. © Elsevier, Paris

1. Introduction

On travaille sur $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^3_k$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et l'on poursuit (cf. [3]) l'étude des fibrés qui sont noyaux de morphismes $b.\mathcal{O} \to a.\mathcal{O}(1)$, définis par des matrices de formes linéaires. Ces fibrés, ou plutôt leurs duaux, ont été considérés, entre autres, par Dolgachev et Kapranov qui les ont appelés *fibrés de Steiner* (cf. [2]). La raison pour laquelle nous nous intéressons à ces fibrés de Steiner, est qu'ils forment la classe la plus simple de fibrés de syzygies, et que la connaissance de la cohomologie des fibrés de syzygies semble un passage obligé pour la classification des résolutions. On aborde ici l'étude de la stratification du champ de ces fibrés par la dimension des groupes de cohomologie (des fibrés tordus $E(d)$). L'étude de cette stratification se réduit évidemment à celle des stratifications correspondantes sur les espaces de matrices.

Soient A et B des espaces vectoriels de dimension a et b. On note V l'espace $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1))$, et M l'espace des morphismes m de B vers $A \otimes V$ tels que le morphisme correspondant $\underline{m} : b.\mathcal{O} \to a.\mathcal{O}(1)$ soit surjectif : M est non vide dès que $b \geq a+3$ ([3], Prop.1.1). On note E_m le fibré vectoriel de rang $b-a$, noyau de $\underline{m}$.

Pour $f \geq 1$ on introduit le sous-schéma $\mathrm{W}^{f-1}[d]$ de M des matrices m telles que le corang du morphisme induit

$$m(d) : B \otimes S^d V \longrightarrow A \otimes S^{d+1} V$$

soit au moins f (le corang est le minimum des rangs du noyau et du conoyau). Pour $d = 0$, il est facile d'identifier $\mathrm{W}^{f-1}[0]$, car les fibrés correspondants admettent un facteur direct trivial de rang f. Dans ce travail, nous considérons seulement le cas suivant, $d = 1$. On fixe donc a, b et f, et l'on pose $W := \mathrm{W}^{f-1}[1]$. On fait une fois pour toutes l'hypothèse $b \geq 5a/2$, qui correspond au fait que si m est générique dans M alors $h^0(E_m(1)) = 4b - 10a$ ([3], Prop.4.4), et m appartient à W si et seulement si $h^1(E_m(1)) \geq f$. Dans le même ordre d'idées, on se restreint au cas $b \leq 4a$ puisqu'on vérifie facilement que tout fibré de Steiner avec $b > 4a$ est somme directe d'un fibré trivial et d'un fibré de Steiner avec $b = 4a$.

On peut formuler comme suit le problème de Brill-Noether pour ces fibrés :

1. Déterminer l'ensemble F des valeurs de f pour lesquelles W est non vide;
2. Pour f dans F, étudier les composantes irréductibles de W;
3. Pour chacune de ces composantes, étudier les propriétés du fibré paramétré par le point générique : en particulier, sa cohomologie.

Dans ce travail, nous étudions l'ouvert W_P de W des matrices m telles que l'image de

$$m(1) : B \otimes V \longrightarrow A \otimes \mathrm{S}^2 V$$

soit de codimension exactement f, et où le morphisme $m \mapsto \mathrm{Im}\,(m(1))$, à valeurs dans la grassmannienne des sous-espaces de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, est dominant. Il est assez facile de voir que si W_P est non-vide et non contenu dans $\mathrm{W}^0[0]$, il est irréductible. Notre premier résultat identifie l'ensemble PF des triplets (a, b, f) (toujours avec $5a/2 \leq b \leq 4a$) pour lesquels W_P est non-vide et non contenu dans $\mathrm{W}^0[0]$, et assure que, pour (a, b, f) dans PF, le fibré paramétré par le point générique de W_P a la cohomologie attendue :

THÉORÈME 1.1. – *Soient a et b deux entiers positifs avec $5a/2 \leq b \leq 4a$ et $5b \geq 12a + 8$, et soit f positif. Pour que W_P ne soit pas contenu dans $\mathrm{W}^0[0]$, il faut et il suffit que f soit inférieur à $a - b/4$. Dans ce cas, W_P est irréductible et le fibré E_μ paramétré par son point générique μ a la cohomologie attendue en ce sens que, pour $k \neq 1$, au plus un des quatre nombres $h^i(E_\mu(k))$ est non nul.*

Notre méthode de démonstration consiste, comme dans [3], à considérer les matrices m telles que l'image de $m(1)$ soit contenue dans un sous-espace de codimension donnée f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, et à majorer le lieu des mauvaises matrices en le stratifiant judicieusement.

Le résultat précédent est insuffisant pour l'application aux courbes qui est la motivation initiale de ce travail. Il nous faut en effet savoir, pour le fibré E_μ du théorème précédent, si le morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(E_\mu(1)) \otimes \mathcal{O} \to E_\mu(1)$ est *versel*, i.e. si les lieux où son rang est constant sont lisses de la codimension attendue([3]). Ce problème prend deux tournures assez différentes selon que la dimension $4b - 10a + f$ de $\mathrm{H}^0(E_\mu(1))$ est inférieure ou supérieure au rang $b - a$ de $E_\mu(1)$, et nous n'abordons ici que le second cas (l'autre devrait permettre de construire des courbes gauches à *monade* linéaire). On suppose donc $f \geq 9a - 3b$ et on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. – *Soit f strictement positif, tel que*

$$9a - 3b \leq f \leq \min\left(\frac{3a-1}{11}, \frac{13a-4b-5}{5}, \frac{16a-5b-5}{2}\right).$$

Alors, si μ désigne le point générique de W_P, le fibré $E_\mu(1)$ est d'évaluation verselle : les lieux où le morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(E_\mu(1)) \otimes \mathcal{O} \to E_\mu(1)$ est de rang constant sont lisses, de la codimension attendue.

Ce théorème se démontre en poussant sensiblement plus loin la méthode utilisée précédemment. Les bornes que nous imposons à f ne semblent pas trop restrictives puisque, dans notre application, nous obtenons pratiquement le résultat optimal.

L'application mentionnée dans le titre concerne la classification des courbes (génériques) de $\mathbb{P}^3$, et plus précisement l'existence de courbes génériques "principales". Il est bien connu qu'il existe un domaine de (d, g) ("domaine A") où l'on s'attend à l'existence d'une unique composante irréductible du schéma de Hilbert $H(d, g)$ (composante "principale"), telle que la courbe générique correspondante ait toutes les "bonnes" propriétés voulues. En particulier la résolution libre minimale de l'idéal d'une telle courbe devrait être linéaire ou presque linéaire (il n'y a que quatre formes possibles). Une courbe générique C de $\mathbb{P}^3$ est dite à résolution linéaire si son idéal $\mathcal{I}_C$ admet une résolution de la forme :

$$0 \longrightarrow a.\mathcal{O}(-s-2) \longrightarrow b.\mathcal{O}(-s-1) \longrightarrow c.\mathcal{O}(-s) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

Observons que si le morphisme $a.\mathcal{O}(-s-2) \to b.\mathcal{O}(-s-1)$ est vu comme morphisme m de B vers $A \otimes V$, alors $m(1)$ est de rang au plus $3b + a - 1$ (car le dual du fibré des syzygies tordu par $-s$ a au moins $b - a + 1$ sections). En particulier si $b \leq 3a$, alors m ne peut être générique.

Nous dirons que la courbe générique C ci-dessus est à *résolution linéaire prédominante* (rlp), de type (a, b), si l'image de $m(1)$ est le sous-espace générique (en ce sens que son image dans le quotient de la grassmannienne par $Gl(A)$ est le point générique) de dimension $\min(10a, 3b + a - 1)$ de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$. Rappelons que les courbes linéaires dominantes introduites dans [3] pour $b > 3a$ ont $m(1)$ surjectif et donc sont rlp. En utilisant les théorèmes précédents avec $f = 9a - 3b + 1$ nous obtenons :

THÉORÈME 1.3. – *Pour $a \geq 7$ et $b > (3 - \frac{1}{11})a + \frac{10}{11}$, il existe dans $\mathbb{P}^3$ une unique courbe générique lisse, géométriquement connexe, à résolution linéaire prédominante de type (a, b).*

Cet énoncé est tout près d'être optimal puisque la condition $b > (3 - \frac{1}{11})a + \frac{1}{3}$ est nécessaire (remarque 7.3). On observera par ailleurs que la construction des présentes courbes est sensiblement plus délicate que celle des courbes à résolution linéaire dominante de [3]. Ceci correspond au fait que nos nouvelles courbes sont construites comme lieux de dépendance de sections de fibrés qui, contrairement au cas de [3], *ne sont pas engendrés par leurs sections* (remarque 4.3).

Remarquons également que l'on ne peut espérer que toutes les courbes génériques principales à résolution linéaire soient rlp : en effet, les composantes rlp du schéma de Hilbert sont unirationnelles, tandis que les composantes principales du domaine de Brill-Noether ne le sont en général pas ([5], [4]).

Enfin, nous pensons que les techniques developpées dans ce travail (ainsi que dans [3]) devraient s'appliquer aux cas "mixtes" (résolutions "quasi-linéaires"), dans des domaines analogues, et devraient donc permettre de résoudre le problème de la composante principale dans une frange entière ("au sommet") du domaine A.

Remerciements. Les auteurs remercient le referee pour sa lecture attentive du manuscrit.

2. F-formes et transport d'équations

2.1. F-formes trilinéaires partiellement symétriques

Soient A, F et V trois espaces vectoriels de dimension a, f et $n+1$ respectivement (dans toute la suite de cet article, on aura $n = 3$). On appelle F-forme tout morphisme à valeur dans F. On dira qu'une F-forme trilinéaire f sur $A \times V \times V$ est *partiellement symétrique* si elle vérifie l'identité $f(x, y, z) = f(x, z, y)$. Une telle F-forme trilinéaire donne naissance à des F-formes linéaires sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ et $A \otimes V \otimes V$, la deuxième se déduisant de la première par composition avec le produit $A \otimes V \otimes V \longrightarrow A \otimes \mathrm{S}^2 V$. Elle donne aussi naissance à une application linéaire de $A \otimes V$ vers $V^\vee \otimes F$, associée à l'application bilinéaire de $A \times V$ vers $V^\vee \otimes F = \mathrm{Hom}(V, F) : (x, y) \mapsto (z \mapsto f(x, y, z))$. Inversement toute F-forme linéaire sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ provient d'une F-forme trilinéaire partiellement symétrique, qu'on obtient en composant avec le produit naturel de $A \times V \times V$ vers $A \otimes \mathrm{S}^2 V$.

Dans la suite on rencontrera d'abord des F-formes linéaires sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$. Si g est une telle F-forme linéaire sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, on notera g^* le morphisme correspondant de $A \otimes V$ vers $V^\vee \otimes F$ et g' celui de $F^\vee \otimes \mathrm{S}^2 V$ vers $A^\vee$. Les morphismes g et g^* sont liés par le diagramme commutatif :

(D.1)
$$\begin{array}{ccc} A \otimes V & = & A \otimes V \\ \downarrow {\scriptstyle j^*} & & \downarrow {\scriptstyle g^*} \\ A \otimes \mathrm{S}^2 V \otimes V^\vee & \xrightarrow{g \otimes 1} & V^\vee \otimes F \end{array}$$

où j^* est le composé de : $\mathbf{1} \otimes \pi \otimes \mathbf{1} : A \otimes (V \otimes V) \otimes V^\vee \longrightarrow A \otimes \mathrm{S}^2 V \otimes V^\vee$ avec $\mathbf{1} \otimes j : (A \otimes V) \otimes k \longrightarrow A \otimes V \otimes V \otimes V^\vee$, et $j : k \longrightarrow V \otimes V^\vee$ est définie par l'application identique de V. Le diagramme précédent exprime g^* en fonction de g. Pour exprimer inversement g en fonction de g^*, on dispose du diagramme commutatif suivant (qui est une conséquence immédiate du cas classique avec $A = F = k$) :

(D.2)
$$\begin{array}{ccc} A \otimes V \otimes V & \xrightarrow{g^* \otimes 1} & F \otimes V^\vee \otimes V \\ {\scriptstyle 1 \otimes s} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 1 \otimes t} \\ A \otimes \mathrm{S}^2 V & \xrightarrow{g} & F \otimes k \end{array}$$

où s et t sont les morphismes naturels de produit et de trace.

2.2. F-formes trilinéaires très partiellement symétriques

On généralise un peu ce qui précède. Si H est un hyperplan de V, on dit qu'une F-forme trilinéaire sur $A \times H \times V$ est *très partiellement symétrique* (tps) si sa restriction à $A \times H \times H$ est partiellement symétrique. Une F-forme tps donne naissance à une F-forme linéaire sur $A \otimes H \otimes V$ qui se factorise à travers $A \otimes H.V$, où $H.V$ désigne l'hyperplan image de $H \otimes V$ dans $\mathrm{S}^2 V$, ainsi qu'à un morphisme de $A \otimes V$ vers $\mathrm{H}^\vee \otimes V$. Inversement toute F-forme linéaire f sur $A \otimes H.V$ provient d'une F-forme tps, et on note f^* le morphisme associé de $A \otimes V$ vers $\mathrm{H}^\vee \otimes F$. Comme plus haut f et f^* sont liés par les diagrammes commutatifs :

(D.3)
$$\begin{array}{ccc} A \otimes V & = & A \otimes V \\ \downarrow {\scriptstyle j^*} & & \downarrow {\scriptstyle f^*} \\ A \otimes H.V \otimes \mathrm{H}^\vee & \xrightarrow{f \otimes 1} & \mathrm{H}^\vee \otimes F \end{array}$$

où j^* est le composé de $\mathbf{1} \otimes \pi \otimes \mathbf{1} : A \otimes (V \otimes H) \otimes \mathrm{H}^\vee \to A \otimes H.V \otimes \mathrm{H}^\vee$ avec $\mathbf{1} \otimes j : (A \otimes V) \otimes k \to A \otimes V \otimes H \otimes \mathrm{H}^\vee$, et

$$\text{(D.4)} \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes V \otimes H & \xrightarrow{f^* \otimes \mathbf{1}} & F \otimes \mathrm{H}^\vee \otimes H \\ \downarrow {\scriptstyle \mathbf{1} \otimes s} & & \downarrow {\scriptstyle \mathbf{1} \otimes t} \\ A \otimes H.V & \xrightarrow{f} & F \otimes k \end{array}$$

Les F-formes constituent un moyen de calculer autour des objets qui nous intéressent, à savoir les sous-espaces de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$. Si Z est un tel sous-espace, on note F_Z le quotient correspondant, Z^* le noyau du morphisme correspondant de $A \otimes V$ vers $F_Z \otimes V^\vee$.

2.3. Transports d'équations

Soit B un espace vectoriel de dimension b. Pour un morphisme $m : B \to A \otimes V$, on note $m(1) : B \otimes V \to A \otimes \mathrm{S}^2 V$ le morphisme induit. Dans ce paragraphe on montre qu'une équation, portant sur $m(1)$, de la forme $g \circ m(1) = 0$, équivaut à un système d'équations de la forme $g^* \circ m = 0$. L'avantage est que le rang de ce nouveau système est plus accessible (on l'appelle le V^*–rang de g; cf. Définition 3.1).

PROPOSITION 2.1. – *Soit g une F-forme linéaire sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$. Le morphisme $m : B \to A \otimes V$ vérifie $g \circ m(1) = 0$ si et seulement si $g^* \circ m = 0$.*

Démonstration : En utilisant (D.1), on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{m} & A \otimes V & & \\ \downarrow {\scriptstyle \mathbf{1} \otimes j} & & {\scriptstyle j^*} \downarrow & \searrow^{g^*} & \\ B \otimes V \otimes V^\vee & \xrightarrow{m(1) \otimes 1} & A \otimes {\scriptstyle s}^2 V \otimes V^\vee & \xrightarrow{g \otimes 1} & V^\vee \otimes F. \end{array}$$

L'hypothèse $g \circ m(1) = 0$ implique que $(g \otimes 1) \circ (m(1) \otimes 1)$ est nul. Par suite $g^* \circ m$ est nul. Inversement on construit à partir de (D.2) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} B \otimes V & \xrightarrow{m \otimes 1} & A \otimes V \otimes V & \xrightarrow{g^* \otimes 1} & F \otimes V^\vee \otimes V \\ & {\scriptstyle m(1)} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \mathbf{1} \otimes s} & & \downarrow {\scriptstyle \mathbf{1} \otimes t} \\ & & A \otimes \mathrm{S}^2 V & \xrightarrow{g} & F \otimes k \end{array}$$

qui montre que si $g^* \circ m$ est nul, alors $g \circ m(1)$ l'est aussi. □

Si H est un hyperplan de V, on note $m_H(1) : B \otimes H \to A \otimes H.V$ le morphisme induit par m (cf. [3]).

PROPOSITION 2.2. – *Soit f une forme linéaire sur $A \otimes H.V$. Alors le morphisme m vérifie $f \circ m_H(1) = 0$ si et seulement si $f^* \circ m = 0$.*

Démonstration : Analogue à la précédente, en utilisant (D.3) et (D.4) au lieu de (D.1) et (D.2). □

PROPOSITION 2.3. – *Soit Z un sous-espace de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ et Z' l'intersection, supposée transverse, de Z avec $A \otimes H.V$. Soit T un sous-espace de $A \otimes H.V$ contenu dans Z'. On pose $F' := (A \otimes H.V)/T$ et $F := (A \otimes \mathrm{S}^2 V)/Z$, et l'on considère le morphisme correspondant*

$$f^*_{Z,T} : A \otimes V \longrightarrow (V^\vee \otimes F) \oplus (\mathrm{H}^\vee \otimes F').$$

Alors, pour que l'image de $m(1)$ soit contenue dans Z et celle de $m_H(1)$ dans T, il faut et il suffit que $f^*_{Z,T} \circ m = 0$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes. □

3. Rangs auxiliaires et stratifications

Dans toute la suite de cet article, la dimension de V sera égale à quatre. Pour comprendre les sous-espaces linéaires de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, nous aurons besoin d'introduire des quantités auxiliaires, qui seront les rangs de certaines applications associées.

DÉFINITION 3.1 (du V^*-rang). – *Si g est une F-forme sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, son V^*-rang est par définition le rang de $g^* : A \otimes V \to F \otimes V^\vee$. Si Z est un sous-espace linéaire de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ on définit son V^*-rang comme le V^*-rang de son conoyau.*

LEMME 3.2. – *Si $a \geq f$, le sous-espace linéaire générique de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ est de V^*-rang maximum, à savoir $4f$.*

Démonstration : Soit F un espace vectoriel de dimension f, et $x : A \to F$ surjectif d'une part, $y : V \to V^\vee$ symétrique non-dégénérée d'autre part. Alors $x \otimes y$ provient d'une F-forme linéaire sur $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, dont le noyau est de codimension f et de V^*-rang maximum, c'est-à-dire $4f$. □

DÉFINITION 3.3 (du Z-rang). – *Si T et Z sont deux sous-espaces linéaires de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$, avec $T \subset Z$, on appelle Z-rang de T le V^*-rang de T diminué du V^*-rang de Z.*

On va maintenant stratifier par le Z-rang l'espace projectif des hyperplans du sous-espace linéaire générique Z de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$. On notera donc G_r le sous-schéma des hyperplans de Z de Z-rang au plus r. Dans le reste de cette section, on majore la dimension de G_r. En vertu du lemme 3.2, le Z-rang générique est égal à quatre.

PROPOSITION 3.4. – *Supposons $2a > 5f$. Alors G_0 est vide, et on a*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{codim} G_1 \geq \min(12a - 12f - 3, 11a - 5f - 5, 9a - f - 3),\\
&\operatorname{codim} G_2 \geq \min(7a - f - 4, 8a - 8f - 4),\\
&\operatorname{codim} G_3 \geq 4a - 4f - 3.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit Φ un morphisme surjectif de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ vers k^f dont Z est le noyau. Pour étudier les G_r, il nous suffit de stratifier le schéma, de dimension $10a$, des (noyaux des) morphismes surjectifs g de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ vers k^{f+1} de la forme $(\Phi, -)$. Choisissons des bases (e_j) sur A et (v_p) sur V. La matrice X de Φ s'écrit x_{pqjs}, où $1 \leq p, q \leq 4$, $1 \leq j \leq a$ et $1 \leq s \leq f$, avec la symétrie $x_{pqjs} = x_{qpjs}$. Celle de g s'écrit g_{pqjs} avec $1 \leq p, q \leq 4$, $1 \leq j \leq a$ et $1 \leq s \leq f+1$, et pour $s \leq f$, on a $g_{pqjs} = x_{pqjs}$. On pose $g_{pqj} = g_{pqj,f+1}$. Le Z-rang de $\ker(g)$ est donc le surcroît de rang qu'apportent les "lignes" $g_{p..}$ aux "lignes" $x_{p..s}$ de Φ. Comme dans [3], les majorations de dimension se font localement.

Cas $r = 0$. Les "lignes" $g_{p..}$ sont ici combinaisons linéaires des "lignes" $x_{p..s}$. On majore donc la dimension de l'ensemble Γ des couples (X, C), avec X symétrique, tels que $g_{pqj} = \sum_{rs} c_{prs} x_{qrjs}$ soit encore symétrique, au sens où $g_{pqj} = g_{qpj}$. Si l'on projette sur C, alors A se factorise, c'est-à-dire que la dimension des fibres est linéaire en celle de A, de sorte qu'il suffit de la calculer lorsque A est de dimension 1.

On traite d'abord le cas $f = 1$. La dimension de l'ensemble des X convenables pour C fixé ne dépend que de la forme de Jordan de cette matrice 4×4 : en effet, matriciellement, $G = CX$ est symétrique si et seulement si $PGP^t = (PCP^{-1})(PXP^t)$ l'est aussi. On stratifie donc selon la forme de Jordan $J(C)$ de C, codée par la taille des blocs de Jordan de chaque valeur propre. Pour chaque forme de Jordan J, le tableau suivant donne la dimension O de la strate formée des matrices du type correspondant. La dimension S est celle, pour chaque matrice C de cette strate, de l'espace des X convenables. On a codé les différents types de Jordan en séparant par des barres verticales les tailles des blocs correspondant à des valeurs propres distinctes.

J	O	S	J	O	S
1|1|1|1	16	4	21|1	12	5
2|1|1	15	4	31	11	5
2|2	14	4	11|11	10	6
3|1	14	4	22	9	6
4	13	4	111|1	8	7
11|1|1	13	5	211	7	7
2|11	12	5	1111	1	10

La vérification de ce tableau est élémentaire, et consiste à constater que, dans chaque cas, les composantes non identiquement nulles de la partie antisymétrique de CX forment un ensemble de $10 - S$ formes linéaires indépendantes.

Lorsque f est quelconque, on considère C comme une suite $(C^1, \dots, C^f)$ de f matrices d'ordre 4. Si l'on note X^s la matrice de composantes $x_{pq.s}$, la matrice $C^1X^1 + \cdots + C^fX^f$ doit être symétrique. On stratifie selon le maximum $O(C)$ des $O(C^i)$, tandis qu'on note $S(C)$ le minimum des $S(C^i)$. Les dimensions $O_f(C)$ et $S_f(C)$ des strates et des espaces de solutions correspondants vérifient évidemment

$$O_f = f \times O, \quad S_f \leq S + 10(f-1).$$

(Cette dernière inégalité provient du fait que si par exemple $S(C) = S(C^1)$, la partie antisymétrique de C^iX^i est déterminée par $X^2, \dots, X^f$.)

On observe maintenant que les fibres de la restriction à Γ de la première projection sont de dimension au moins f, puisqu'elles contiennent les f-uplets $(C^1 + \lambda^1 \,\mathrm{Id}\,, \dots, C^f + \lambda^f \,\mathrm{Id}\,)$. On montre alors que la seule strate de Γ dans laquelle X est générique est la dernière, celle où $O = 1$. En effet, pour chacune des autres strates, on a $(10 - S)a > (O-1)f$ grâce à l'hypothèse faite sur f, et donc $10af > aS_f + O_f - f$. Quant à la dernière strate, elle ne nous concerne pas puisque ses points ne définissent pas un sous-espace de codimension $f+1$ de $A \otimes \mathrm{S}^2V$. On a donc montré que G_0 est vide.

Cas $r = 1$. Quitte à changer de base, on peut supposer ici que le surcroît de rang est dû à $g_{1..}$, d'où les relations de dépendance, pour $2 \leq p \leq 4$,

$$g_{p..} = \alpha_p g_{1..} + \sum_{qs} c_{pqs} x_{q..s}.$$

Les relations de symétrie $g_{pq.} = g_{qp.}$ pour $2 \leq p < q \leq 4$ s'écrivent, en tenant compte de la symétrie $g_{p1.} = g_{1p.}$,

$$\alpha_p \sum_{rs} c_{qrs} x_{1r.s} + \sum_{rs} c_{prs} x_{qr.s} = \alpha_q \sum_{rs} c_{prs} x_{1r.s} + \sum_{rs} c_{qrs} x_{pr.s}.$$

On estime alors la dimension du schéma Γ_1 des (α, c, g, x) vérifiant les équations ci-dessus en stratifiant le schéma des (α, c) selon la dimension des solutions en x : A se factorise.

Génériquement, le système précédent est de rang 3, et la strate correspondante de Γ_1 est de dimension 3 (pour les α), plus $12f$ (pour c), plus a (pour $g_{11.}$), plus $a(10f-3)$ (pour les x, les autres paramètres étant alors déterminés grâce aux relations de symétrie). L'image de cette strate est donc de codimension au moins $12a-12f-3$ dans la variété des morphismes de $A\otimes \mathrm{S}^2V$ vers k^{f+1}. Par suite la strate correspondante de G_1 est de codimension au moins $12a-12f-3$.

Si le système est de rang deux, la strate correspondante de Γ_1 est de dimension 3 (pour les α), plus 2 (pour la relation de dépendance entre les trois équations), plus $5f$ (pour c : en effet, on vérifie facilement que selon la relation de dépendance, il y a moyen de choisir $7f$ parmi les c_{pqs} qui se calculent en fonction des autres, des α et de la relation), plus a (pour $g_{11.}$), plus $a(10f-2)$ (pour les x). La dimension de la strate correspondante est donc majorée par $5f-a+5$.

On remarque enfin que le système n'est jamais de rang un (en effet, si les équations sont proportionnelles, elles sont nulles puisque chaque variable $x_{pr.s}$ n'apparaît que dans deux équations sur trois) , et que le rang zéro ne laisse subsister que $a+f+3$ paramètres (à savoir les $g_{11.}$, les $c_{11.}$ et les α), d'où une dernière strate de dimension $a+f+3$.

Cas $r=2$. On raisonne comme précédemment, en supposant le surcroît de rang dû à $g_{1..}$ et $g_{2..}$, les relations de dépendance étant

$$g_{3..}=\alpha_{31}g_{1..}+\alpha_{32}g_{2..}+\sum_{rs}c_{3rs}x_{r..s},$$
$$g_{4..}=\alpha_{41}g_{1..}+\alpha_{42}g_{2..}+\sum_{rs}c_{4rs}x_{r..s}.$$

La symétrie $g_{34.}=g_{43.}$ donne alors, en utilisant par exemple au passage que $g_{13.}=g_{31.}$, l'unique relation

$$\alpha_{31}\sum_{rs}c_{4rs}x_{r1.s}+\alpha_{32}\sum_{rs}c_{4rs}x_{r2.s}+\sum_{rs}c_{3rs}x_{r4.s}$$
$$=\alpha_{41}\sum_{rs}c_{3rs}x_{r1.s}+\alpha_{42}\sum_{rs}c_{3rs}x_{r2.s}+\sum_{rs}c_{4rs}x_{r3.s}.$$

Dans le cas générique, cette relation est non triviale, et l'on trouve une strate de Γ_2 de dimension 4 (pour les α) plus $8f$ (pour c) plus $3a$ (pour $g_{11.},g_{12.},g_{22.}$) plus $a(10f-1)$ (pour les x), dont la trace sur la variété des morphismes prolongeant Φ de $A\otimes \mathrm{S}^2V$ vers k^{f+1} est donc de dimension au plus $2a+8f+4$, c'est-à-dire de codimension au moins $8a-8f-4$. Par suite la strate correspondante de G_2 est également de codimension au moins $8a-8f-4$.

Quand l'équation en x ci-dessus est identiquement nulle, on a

$$c_{34s}=c_{43s}=0,\quad c_{33s}=c_{44s}:=c_s,\quad \text{et } c_{pqs}=-\alpha_{pq}c_s \text{ si } q\le 2<p.$$

On trouve ainsi une strate de Γ_2 de dimension $3a+f+4+10af$, dont la trace sur la variété des morphismes prolongeant Φ de $A\otimes \mathrm{S}^2V$ vers k^{f+1} est donc de dimension au plus $3a+f+4$, c'est-à-dire de codimension au moins $7a-f-4$. Par suite la strate correspondante de G_2 est également de codimension au moins $7a-f-4$.

Cas $r=3$. Quitte à changer de base dans V, on peut supposer que le surcroît de rang est dû à $g_{1..},g_{2..},g_{3..}$. L'ouvert correspondant est paramétré par les $g_{pq.}$ pour $1\le p\le q\le 3$, et les coefficients exprimant $g_{4..}$ en fonction linéaire des $x_{p..s}$ et de $g_{1..},g_{2..},g_{3..}$. On majore ainsi la dimension par $6a+4f+3$. $\square$

4. La composante PW

Pour m dans $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}\,(B, A \otimes V)$, on désignera par Z_m l'image de $m(1)$ et par $f_m : A \otimes \mathrm{S}^2V \to F_m$ son conoyau. En outre, Z_m^* désignera le noyau du morphisme correspondant de $A \otimes V$ vers $F_m \otimes V^\vee$ (cf. 2.2).

Soit $\mathcal{W} := \mathcal{W}^{f-1}[1]$ le sous-schéma de $\mathcal{M}$ des matrices telles que le corang (le minimum des rangs du noyau et du conoyau) de $m(1)$ soit au moins f. Si $4b \geq 10a$, $\mathcal{W}$ est le sous-schéma des m dans $\mathcal{M}$ tels que codim $Z_m \geq f$. On note W la trace de $\mathcal{W}$ sur l'ouvert M de $\mathcal{M}$. Rappelons que nous avons défini cet ouvert M par la condition que le morphisme $\underline{m} : b.\mathcal{O} \to a.\mathcal{O}(1)$ soit surjectif.

PROPOSITION 4.1. – *On suppose que $2b \geq 5a$, $2a \geq 5f+2$ et $b \geq 2a+f+1$. Alors l'ouvert $\mathcal{PW}$ des m de $\mathcal{W}$ tels que Z_m soit de codimension exactement f et le sous-espace associé Z_m^* de la codimension attendue, à savoir $4f$, est non vide, irréductible, de la codimension attendue $f(4b - 10a + f)$ dans $\mathcal{M}$.*

De plus, la matrice générique μ de $\mathcal{PW}$ représente le morphisme générique de B vers le sous-espace Z^* (de codimension $4f$) de $A \otimes V$ associé au sous-espace générique Z de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2V$. En outre l'image de $\mu(1)$ est Z.

Démonstration : Soit PG l'ouvert de la grassmannienne des sous-espaces de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2V$ qui sont de V^*-rang maximum (lemme 3.2), et soit Q l'ensemble des couples (m, Z) de $\mathcal{M} \times PG$ tels que Z contienne l'image de $m(1)$. En projetant sur PG et en utilisant le transport d'équations (proposition 2.1), on voit que c'est une variété lisse connexe non vide de dimension $d := (10a - f)f + b(4a - 4f) = 4ab - f(4b - 10a + f)$, c'est-à-dire de la dimension attendue pour W.

Soit PQ l'ouvert de Q où Z est l'image de $m(1)$. Alors la première projection induit un isomorphisme de PQ sur $\mathcal{PW}$. Il ne nous reste donc qu'à montrer que PQ est non vide, en majorant par $d-1$ la dimension du schéma R des triplets (m, Z, Z') avec (m, Z) dans Q, Z' hyperplan de Z et l'image de $m(1)$ contenue dans Z'. Pour cela, on stratifie R par le Z-rang r de Z', et l'on calcule la dimension des strates R_r correspondantes par projection sur les deux derniers facteurs. Sur la strate G_r où le Z-rang de Z' est égal à r, le rang de g^* vaut $4f + r$ et la dimension des fibres est donc $b(4a - 4f - r)$; grâce à la proposition 3.4, on obtient donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\dim R_4 \leq (10a - f)f + 10a - f - 1 + b(4a - 4f - 4),\\
&\dim R_3 \leq (10a - f)f + 6a + 3f + 2 + b(4a - 4f - 3)\\
&\dim R_2 \leq (10a - f)f + \max(3a + 3, 2a + 7f + 3) + b(4a - 4f - 2)\\
&\dim R_1 \leq (10a - f)f + \max(-2a + 11f + 2, -a + 4f + 4, a + 2) + b(4a - 4f - 1).
\end{aligned}$$

Ces nombres sont majorés par $d - 1$ dès que $4b \geq 10a - f$, $3b \geq 6a + 3f + 3$, $2b \geq 3a + 4$, $2b \geq 2a + 7f + 4$, $b \geq -2a + 11f + 3$, $b \geq -a + 4f + 5$ et $b \geq a + 3$. Et l'on vérifie facilement que toutes ces inégalités découlent de nos hypothèses. □

On arrive au résultat principal de cette section, annoncé dans l'introduction (Théorème 1.1), et qui énonce l'existence de la composante prédominante du lieu de Brill-Noether W. On rappelle que W_P désigne l'ouvert de W des matrices m telles que l'image de

$$m(1) : B \otimes V \longrightarrow A \otimes \mathrm{S}^2V$$

soit de codimension exactement f, et que le morphisme $m \mapsto \mathrm{Im}\,(m(1))$, à valeurs dans la grassmannienne des sous-espaces de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2V$, soit dominant.

THÉORÈME 4.2. – *Soient a et b deux entiers positifs avec $b \leq 4a$, $2b \geq 5a$ et $5b \geq 12a+8$. Soit f strictement positif.*

Pour $f > a - b/4$, W_P est contenu dans $\mathrm{W}^0[0]$. Pour $f \leq a - b/4$, W_P est contenu dans une unique composante irréductible PW de W, qui a la codimension attendue $f(4b - 10a + f)$, et dont le point générique μ a les propriétés suivantes :

1. *μ représente le morphisme générique de B vers le sous-espace Z^* (de codimension $4f$) de $A \otimes V$ associé au sous-espace générique Z de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2V$; l'image de $\mu(1)$ est Z;*
2. *pour $d > 1, \mu(d) : B \otimes S^dV \to A \otimes S^{d+1}V$ est surjectif; donc $\underline{\mu}$ est surjectif et son noyau E_μ est localement libre de rang $b - a$;*
3. *Le fibré E_μ a la cohomologie attendue, à savoir :*
   (a) pour $k \neq 1$ l'un au plus des groupes $\mathrm{H}^i(E_\mu(k))$ est non nul;
   (b) $h^1(E_\mu(1)) = f$, ce qui détermine tous les $h^i(E_\mu(1))$.

Démonstration : Supposons d'abord $a - b/4 < f$ et soit μ un point générique de W_P. L'image de $\mu(1)$ est contenue dans le sous-espace générique de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2V$, donc aussi dans le sous-espace générique de codimension $f' = \min(f, a)$ de $A \otimes \mathrm{S}^2V$. D'après le lemme 3.2, l'image de μ est alors contenue dans un sous-espace de codimension $4f'$ de $A \otimes V$. De ce fait μ n'est pas injectif et appartient donc à $\mathrm{W}^0[0]$.

Supposons maintenant $f \leq a - b/4$, ce qui implique, sous les hypothèses faites, que $2a \geq 5f + 2$ et $b \geq 2a + f + 1$. La proposition précédente fournit un ouvert irréductible $\mathcal{PW}$ de $\mathcal{W}$ qui contient un ouvert dense de W_P et caractérisé par le point 1. Nous allons vérifier que son point générique μ vérifie les points 2 et 3. Cela impliquera que la trace de $\mathcal{PW}$ sur M est non vide et définit la composante PW cherchée.

Montrons donc le point 2. Comme l'image de $\mu(1)$ est Z, celle de $\mu(d)$ est aussi l'image de $Z \otimes S^{d-1}V$. Il nous suffit donc de prouver que si Y est le sous-espace générique de $A \otimes \mathrm{S}^2V$ de dimension $9a < 10a - f$, le morphisme naturel $Y \otimes S^{d-1}V \to A \otimes S^{d+1}V$ est surjectif. On se ramène ainsi au cas $a = 1$, que l'on traite directement en prenant Y engendré par neuf monômes dont les carrés.

Ainsi μ détermine un morphisme de modules gradués dont le conoyau est de longueur finie, par conséquent $\underline{\mu}$ est surjectif, et son noyau E_μ est bien un fibré de rang $b - a$.

On calcule alors, pour établir le point 3, les groupes de cohomologie de E_μ à l'aide de la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\mu \longrightarrow B \otimes \mathcal{O} \longrightarrow A \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0.$$

L'énoncé (a) découle alors du point 2 (pour $k \geq 2$), et du fait que μ est le morphisme générique de B vers Z^* (pour $k = 0$). L'énoncé (b) résulte du fait que $\mathrm{Im}\,(\mu(1)) = Z$. □

Remarque 4.3 La cohomologie de E_μ est donnée par le tableau suivant, où $\chi(k)$ désigne la caractéristique d'Euler de $E_\mu(k)$:

k	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$h^0(E_\mu(k))$	0	0	0	0	$4b-10a+f$	$\chi(2)$	$\cdots$
$h^1(E_\mu(k))$	0	0	a	$4a-b$	f	0	0
$h^2(E_\mu(k))$	0	0	0	0	0	0	0
$h^3(E_\mu(k))$	$\cdots$	$\chi(-2)$	0	0	0	0	0

Observons que dans le cas que nous considérons au §7, avec $3a \geq b$ et $f = 9a - 3b + 1$, on a $h^0(E_\mu(1)) = b - a + 1 = \mathrm{rang}(E_\mu) + 1$. Ceci implique que $E_\mu(1)$ *n'est pas engendré par ses sections globales* : si c'était le cas, on aurait en effet une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow S \longrightarrow E_\mu(1) \longrightarrow 0,$$

avec S fibré trivial et L fibré de rang un, ce qui impliquerait $h^1(E_\mu) = h^1(E_\mu(1)) = 0$.

5. Stratification par le (Z, H)-rang

Soit Z le sous-espace générique de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ et H un hyperplan de V (défini sur le corps de définition de Z) .

LEMME 5.1. – *Si $9a \geq f + 3$, Z est transverse à $A \otimes H.V$.*

Démonstration : Les sous-espaces de codimension f de $A \otimes \mathrm{S}^2 V$ non transverses à $A \otimes H'.V$, où H' est un hyperplan fixé de V, forment un cycle de Schubert de codimension $9a - f + 1$ dans la grassmannienne correspondante. Ceux qui sont non-transverses à l'un au moins des $A \otimes H'.V$ forment donc un cycle de codimension au moins $9a - f - 2$, et ce nombre est strictement positif. □

On note désormais Z' l'intersection (transverse, comme on vient de le voir) de Z et $A \otimes H.V$. On introduit un nouveau rang auxiliaire, le (Z, H)-rang, à l'aide duquel on va stratifier successivement l'espace projectif des hyperplans de Z' et la grassmannienne de ses sous-espaces de codimension deux.

DÉFINITION 5.2 (du (Z, H)-rang). – *Soit T un sous-espace de $Z' := Z \cap A \otimes H.V$. On pose $F' := (A \otimes H.V)/T$, $F := (A \otimes \mathrm{S}^2 V)/Z$, et l'on note*

$$f^*_{Z,T} : A \otimes V \longrightarrow (F \otimes V^\vee) \oplus (F' \otimes \mathrm{H}^\vee)$$

le morphisme correspondant (cf. 2.3). *On définit alors le (Z, H)-rang de T comme le rang de cette application $f^*_{Z,T}$, diminué du V^*-rang de Z (à savoir $4f$, d'après le lemme 3.2, puisque Z est générique).*

On notera G_r le sous-schéma des hyperplans de Z' de (Z, H)-rang au plus r, sous-schéma dont on va majorer la dimension.

PROPOSITION 5.3. – *Supposons $3a > 11f$. Alors G_0 est vide, et l'on a*

$$\mathrm{codim}\ G_1 \geq \min(8a - 8f - 2, 7a - f - 2),$$
$$\mathrm{codim}\ G_2 \geq 4a - 4f - 2.$$

Démonstration : Soit Φ un morphisme surjectif de $A \otimes S^2 V$ vers k^f dont Z est le noyau, et Φ_H sa restriction à $A \otimes H.V$. Au lieu de G_r il nous suffit de stratifier le schéma, de dimension $9a$, des (noyaux des) morphismes surjectifs g de $A \otimes H.V$ vers k^{f+1} de la forme $(\Phi_H, -)$. Choisissons des bases (e_j) sur A et (v_p) sur V avec $H = \{v_4 = 0\}$. La matrice symétrique X de Φ s'écrit x_{pqjs} avec $1 \leq p, q \leq 4, 1 \leq j \leq a$ et $1 \leq s \leq f$. Celle, partiellement symétrique, de g s'écrit g_{pqjs} avec $1 \leq p \leq 3, 1 \leq q \leq 4, 1 \leq j \leq a$ et $1 \leq s \leq f+1$, et $g_{pqjs} = x_{pqjs}$ pour $s \leq f$. On pose $g_{pqj} = g_{pqj,f+1}$. Le (Z,H)-rang de $\ker(g)$ est donc le surcroît de rang qu'apportent les “lignes” $g_{p..}$ $(p \leq 3)$ aux “lignes” $x_{p..s}$ $(p \leq 4, s \leq f)$ de Φ_H. Comme plus haut, les majorations de dimension se font localement.

Cas $r = 0$. On procède comme pour la proposition 3.4, à ceci près que G et C sont ici des matrices 3×4. On écrit $G = (G_0, \hat{g})$, $C = (C_0, \hat{c})$ et

$$X = \begin{pmatrix} X_0 & x \\ x^t & \xi \end{pmatrix}.$$

On calcule donc les dimensions des strates et des fibres du schéma Γ des couples (C, X) avec CX partiellement symétrique, et d'abord dans le cas $f = 1$. Si $P \in \mathrm{Gl}_3$, soit $i(P)$ son image dans Gl_4. Alors $G = CX$ est partiellement symétrique si et seulement si $PGi(P)^t = (PCi(P)^{-1})(i(P)Xi(P)^t)$ l'est aussi. Comme $PCi(P)^{-1} = (PC_0P^{-1}, P(c))$, on peut supposer que C_0 est sous forme de Jordan. La matrice G est partiellement symétrique si et seulement si la matrice $C_0X_0 + \hat{c}.x^t$ est symétrique, d'où un système de trois équations en les coefficients de X. On stratifie donc l'espace des matrices C par la forme de Jordan de C_0 et la forme de $\hat{c}$ de façon à pouvoir calculer le rang r du système précédent. On obtient le tableau suivant, dans lequel O désigne la dimension des strates et $S = 10 - r$ la dimension de l'espace des solutions correspondantes :

J	$\hat{c}$	r	O	S
1|1|1		3	12	7
11|1	$(0,0,*)$	2	7	8
	autre	3	< 12	7
111	$\neq 0$	2	4	8
	0	0	g non surjectif	
2|1		3	< 12	7
21	$(*,0,0)$	2	6	8
	autre	3	< 12	7
3		3	< 12	7

Lorsque f est quelconque, on considère C comme une suite $(C^1, \ldots, C^f)$ de f matrices 3×4, et l'on stratifie selon le maximum $O(C)$ des $O(C^i)$, tandis qu'on note $S(C)$ le minimum correspondant des $S(C^i)$. Les dimensions $O_f(C)$ et $S_f(C)$ des strates et des espaces de solutions correspondants vérifient évidemment

$$O_f = f \times O, \quad S_f \leq S + 10(f-1).$$

On observe maintenant que les fibres de la restriction à Γ de la première projection sont de dimension au moins f, à cause de l'invariance par $c_{pqs} \mapsto c_{pqs} + \gamma_s \delta_{pq}$. On constate alors que toute les strates vérifient $(10 - S)a > (O-1)f$, ce dont on déduit l'inégalité $10af > aS_f + O_f - f$, qui signifie qu'aucune strate ne domine l'espace des matrices X.

Cas $r = 1$. Quitte à changer de base dans H, on peut supposer que le surcroît de rang est dû à $g_{1..}$, d'où des relations de dépendance

$$g_{2..} = \alpha_2 g_{1..} + \sum_{rs} c_{2rs} x_{r..s},$$
$$g_{3..} = \alpha_3 g_{1..} + \sum_{rs} c_{3rs} x_{r..s}.$$

On doit tenir compte de l'unique relation de symétrie $g_{23.} = g_{32.}$, qui donne, compte tenu du fait que $g_{p1.} = g_{1p.}$, l'identité

$$\sum_{rs} c_{3rs}(x_{r2.s} - \alpha_2 x_{r1.s}) = \sum_{rs} c_{2rs}(x_{r3.s} - \alpha_3 x_{r1.s}).$$

On estime alors la dimension du schéma Γ_1 des (α, c, g, x) vérifiant les équations ci-dessus en stratifiant le schéma des (α, c) selon la dimension des solutions en x : A se factorise. Là où la relation précédente est non triviale, la strate correspondante de Γ_1 est de dimension 2 (pour les α), plus $8f$ (pour c), plus $2a$ (pour $g_{11.} et g_{14.}$), plus $a(9f-1)$ (pour les x autres que x_{44}), et donc sa fibre à x fixé est de dimension au plus $a + 8f + 2$. La codimension de cette fibre est donc au moins $8a - 8f - 2$. Si la relation est triviale, c'est que $c_{pqs} = 0$ pour $2 \leq p \neq q \leq 4$ et $p \leq 3$, que $c_{22s} = c_{33s} := c_s$ et que $c_{p1s} = -\alpha_p c_s$ pour $p = 2, 3$. La strate correspondante de Γ_1 est de dimension 2 (pour les α), plus f (pour les c_s), plus $2a$ (pour $g_{11.}$ et $g_{14.}$), plus $9af$ (pour les x autres que x_{44}), et donc sa fibre à x fixé est de dimension au plus $2a + f + 2$. La codimension de cette fibre est donc au moins $7a - f - 2$.

Cas $r = 2$. On peut de même supposer que le surcroît de rang est dû à $g_{1..}$ et $g_{2..}$. L'ouvert correspondant est paramétré par $g_{11.}, g_{12.}, g_{14.}, g_{22.}, g_{24.}$ et les coefficients exprimant $g_{3..}$ en fonction linéaire des $x_{p..s}$ et de $g_{1..}$ et de $g_{2..}$. On majore ainsi la dimension par $5a + 4f + 2$. □

Remarque 5.4 Si $3a < 11f$, alors G_0 est non vide. En effet, reprenons les notations de la démonstration précédente, et raisonnons dans l'espace des matrices g non nécessairement symétriques, espace qui est de dimension $12a$. Celles pour lesquelles $r = 0$, c'est-à-dire pour lesquelles on a une relation de dépendance de la forme

$$g_{p..} = \sum_{qs} c_{pqs} x_{q..s},$$

forment un sous-espace de dimension $12f$. Parmi celles-ci, celles qui sont symétriques forment un sous-espace de dimension au moins $12f - 3a$, puisque le sous-espace des matrices symétriques est de codimension $3a$.

Si $12f - 3a > f$, certaines de ces matrices définissent nécessairement des hyperplans de Z : en effet, les matrices qui ne définissent pas un hyperplan de Z forment un sous-espace de dimension f. Et les hyperplans en question définissent des points de G_0.

Notons maintenant G'_r le sous-schéma des sous-espaces de codimension deux de Z' de (Z, H)-rang au plus r, et majorons sa dimension.

PROPOSITION 5.5. – *Supposons que $2a > 5f$. Alors G'_0 est vide, et on a*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{codim} G'_1 \geq \min(20a - 20f - 5, 19a - 13f - 6, 18a - 6f - 7, 17a - 2f - 5),\\
&\operatorname{codim} G'_2 \geq \min(16a - 16f - 8, 15a - 9f - 7, 14a - 2f - 5),\\
&\operatorname{codim} G'_3 \geq \min(12a - 12f - 8, 11a - 5f - 5),\\
&\operatorname{codim} G'_4 \geq \min(8a - 8f - 8, 7a - f - 3),\\
&\operatorname{codim} G'_5 \geq 4a - 4f - 5.
\end{aligned}$$

Démonstration : On stratifie cette fois le schéma, de dimension $18a$, des morphismes surjectifs g de $A \otimes H.V$ vers k^{f+2} de la forme $(\Phi_H, -)$. On garde les mêmes notations en posant de plus $g'_{pqj} = g_{pqj,f+2}$. On voit ici X comme un morphisme de $V \otimes F^\vee$ vers $A^\vee \otimes V^\vee$, g et g' comme deux morphismes de H vers le même but, c et c' comme deux morphismes de H vers $V \otimes F^\vee$, et h, k, ... comme des vecteurs de $A^\vee \otimes V^\vee$.

Cas $r = 0$. Cela découle de la proposition précédente.

Cas $r = 1$. Ici les lignes $g_{p..}$ et $g'_{p..}$ sont proportionnelles, modulo les lignes $x_{r..s}$, à une même ligne $h_{..}$, ce qui s'écrit, pour $1 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned}
g_{p..} &= \alpha_p h_{..} + \sum_{rs} c_{prs} x_{r..s},\\
g'_{p..} &= \alpha'_p h_{..} + \sum_{rs} c'_{prs} x_{r..s}.
\end{aligned}$$

On estime alors la dimension du schéma des $(x, h, \alpha, \alpha', c, c')$ pour lesquels la contrainte de symétrie est respectée, en projetant sur (α, α', c, c'). Notons que les fibres de la projection de $(x, h, \alpha, \alpha', c, c')$ sur (x, g, g') sont de dimension $4f + 1$, à cause de l'invariance par la transformation

$$\begin{aligned}
\alpha_p &\mapsto m^{-1}\alpha_p,\\
\alpha'_p &\mapsto m^{-1}\alpha'_p,\\
h_{..} &\mapsto m h_{..} + \sum_{rs} n_{rs} x_{r..s},\\
c_{prs} &\mapsto c_{prs} - \alpha_p n_{rs},\\
c'_{prs} &\mapsto c'_{prs} - \alpha'_p n_{rs}.
\end{aligned}$$

Les six relations de symétrie s'écrivent, A étant mis en facteur

$$\begin{aligned}
\alpha_p h_q - \alpha_q h_p &= \sum_{rs} (c_{qrs} x_{prs} - c_{prs} x_{qrs}),\\
\alpha'_p h_q - \alpha'_q h_p &= \sum_{rs} (c'_{qrs} x_{prs} - c'_{prs} x_{qrs}),
\end{aligned}$$

avec $1 \leq p < q \leq 3$. Ce système s'écrit sous la forme

$$h \wedge \alpha = C(x), \quad \text{et} \quad h \wedge \alpha' = C'(x),$$

où par exemple $h \wedge \alpha$ désigne l'image naturelle de $h \otimes \alpha$ dans $A^\vee \otimes \Lambda^2 H^\vee$; tandis que $C(x)$ est l'image naturelle dans $A^\vee \otimes \Lambda^2 H^\vee$ du composé $X \circ c$. On remarque alors que

α et α' ne peuvent être parallèles, à cause de la première assertion de la proposition 3.4. Le système précédent détermine donc la projection de h dans $A^\vee \otimes \mathrm{H}^\vee$ sous réserve que soient vérifiées les trois conditions de compatibilité

$$C(x) \wedge \alpha = C'(x) \wedge \alpha' = C(x) \wedge \alpha' + C'(x) \wedge \alpha = 0.$$

On stratifie donc par le rang de ce système en x, en choisissant une base commençant par α et α'. Le système devient

$$\begin{aligned}
&\sum_{rs}(c_{2rs}x_{3rs} - c_{3rs}x_{2rs}) = 0,\\
&\sum_{rs}(c'_{1rs}x_{3rs} - c'_{3rs}x_{1rs}) = 0,\\
&\sum_{rs}(c_{1rs}x_{3rs} - c_{3rs}x_{1rs}) = \sum_{rs}(c'_{2rs}x_{3rs} - c'_{3rs}x_{2rs}).
\end{aligned}$$

Si ce système est de rang zéro, la premire ligne donne $c_{pqs} = 0$ pour $p = 2, 3$ et $q \neq p$, ainsi que $c_{22s} = c_{33s}$; la seconde ligne donne de même $c'_{pqs} = 0$ pour $p = 1, 3$ et $q \neq p$, ainsi que $c'_{11s} = c'_{33s}$; la troisime ligne donne $c_{13s} = c'_{23s}$, $c_{14s} = c'_{24s}$, $c_{12s} = c'_{22s} - c'_{33s}$ et $c'_{21s} = c_{11s} - c_{33s}$. Tous ces coefficients sont donc déterminés par exemple par les $c_{11s}, c_{22s}, c'_{11s}, c'_{22s}, c'_{23s}$ et c'_{24s}. Cette strate est donc de dimension 6 (pour α et α'), plus $6f$ (pour $c_{11}, c_{22}, c'_{11}, c'_{22}, c'_{23}$ et c'_{24}), plus $10af$ (pour les x), plus a (pour les composantes de h qui ne sont pas déterminées), moins $4f + 1$ (pour les fibres de la projection sur (g, g')), soit de codimension $17a - 2f - 5$.

S'il est de rang un sans qu'aucune équation ne soit identiquement nulle, on constate en examinant les deux premières, qu'elles doivent être proportionnelles à une combinaison de $x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{33}$ et x_{34}, ce qui implique l'annulation de $c_{31}, c_{32}, c_{34}, c'_{31}, c'_{32}$ et c'_{34}. Mais alors les coefficients de x_{12} sont nuls, et nos trois équations doivent être proportionnelles à une combinaison de x_{13}, x_{23}, x_{33} et x_{34} : le choix d'une telle combinaison donne $4f$ degrés de liberté. On constate alors que les coefficients de ces inconnues forment douze combinaisons linéairement indépendantes des c_{pq} et c'_{pq} restants, ce qui laisse encore $6f + 2$ degrés de liberté (dont deux pour les coefficients de proportionnalité). La strate correspondante est donc de dimension 6 (pour α et α'), plus 2 (pour la dépendance entre les trois équations), plus $10f$ (pour c et c'), plus $a(10f - 1)$ (pour les x), plus a (pour les composantes de h qui ne sont pas déterminées), moins $4f + 1$ (pour les fibres de la projection sur (g, g')), soit de codimension $18a - 6f - 7$. Si l'une des trois équations est identiquement nulle, on vérifie qu'il ne reste que $10f + 1$ degrés de liberté pour c et c' (en tenant compte de la dépendance entre les deux équations restantes), ce qui donne une strate de dimension inférieure d'une unité à celle de la précédente.

Passons au cas où le système est de rang deux. Si $c_{34.}$ ou $c'_{34.}$ est non nul, on constate en examinant les coefficients de x_{14} et x_{24} que les coordonnées $(a : b : c)$ de la relation entre les trois équations doivent vérifier l'identité $ab + c^2 = 0$. La strate correspondante est de dimension 6 (pour α et α'), plus 1 (pour la relation précédente), plus $17f$ (pour c et c', puisqu'on obtient $7f$ relations indépendantes entre les c_{pq} et c'_{pq}), plus $a(10f - 2)$ (pour les x), plus a (pour les composantes de h qui ne sont pas déterminées), moins $4f + 1$ (pour les fibres de la projection sur g, g'), soit de codimension $19a - 13f - 6$. Si maintenant $c_{34.}$ et $c'_{34.}$ sont nuls, on distingue suivant l'équation dont la relation de dépendance permet de calculer les coefficients, et on constate dans chaque cas qu'on peut calculer six nouveaux coefficients en fonction des autres. Les strates correspondantes sont alors de codimension au moins $19a - 8f - 7$, donc de dimension plus petite que la précédente.

Enfin la strate où le rang est trois est de dimension 6 (pour α et α'), plus $24f$ (pour c et c'), plus $a(10f-3)$ (pour les x) plus a (pour les composantes de h qui ne sont pas déterminées) moins $4f+1$ (pour les fibres de la projection sur (g,g')), soit de codimension $20a - 20f - 5$.

Cas $r = 2$. Comme ci-dessus, on écrit

$$g_{p..} = \alpha_p h_{..} + \beta_p k_{..} + \sum_{rs} c_{prs} x_{r..s},$$
$$g'_{p..} = \alpha'_p h_{..} + \beta'_p k_{..} + \sum_{rs} c'_{prs} x_{r..s},$$

avec $1 \le p \le 3$. Ici, les fibres de la projection de $(x,h,k,\alpha,\alpha',\beta,\beta',c,c')$ sur (x,g,g') sont de dimension $8f+4$, à cause de l'invariance par l'action de Gl_2 sur $h,k,\alpha,\alpha',\beta,\beta'$, sur laquelle on va revenir, et par la transformation

$$\begin{aligned} h_{..} &\mapsto h_{..} + \sum_{rs} l_{rs} x_{r..s}, \\ k_{..} &\mapsto k_{..} + \sum_{rs} n_{rs} x_{r..s}, \\ c_{prs} &\mapsto c_{prs} - \alpha_p l_{rs}, \\ c'_{prs} &\mapsto c'_{prs} - \alpha'_p n_{rs}. \end{aligned}$$

Les relations de symétrie donnent, C et C' étant comme ci-dessus,

$$\alpha \wedge h + \beta \wedge k = C(x),$$
$$\alpha' \wedge h + \beta' \wedge k = C'(x).$$

Et on estime la dimension du schéma des $(x,h,k,\alpha,\alpha',\beta,\beta',c,c')$ pour lesquels la contrainte de symétrie est respectée, en projetant sur le schéma des $(h,k,\alpha,\alpha',\beta,\beta',c,c')$.

Première étape : réduction de $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$.

Observons tout d'abord que g et g' sont inchangés si l'on compose la matrice 2×2 de trivecteurs $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{smallmatrix}\right)$ à droite par une matrice $P \in \mathrm{Gl}_2$, tout en appliquant P^{-1} au vecteur (h,k). On peut également changer de base de façon à remplacer g, g' par des combinaisons linéaires, ce qui a pour effet de multiplier la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{smallmatrix}\right)$ à gauche par une nouvelle matrice $Q \in \mathrm{Gl}_2$.

Ceci permet de réduire la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{smallmatrix}\right)$, que l'on considère, dans une base donnée, comme une famille de trois matrices A_1, A_2, A_3. À cause de la première assertion de la proposition 5.3, ces matrices ne sont pas toutes nulles. On peut même supposer qu'elles ne sont pas toutes singulières, puisque si c'était le cas dans toute base, elles seraient toutes les trois multiples d'une même matrice de rang un, que l'on pourrait supposer être $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Autrement dit, on serait ramené à $\beta = \alpha' = \beta' = 0$, et les $g'_{p..}$ seraient combinaisons linéaires des $x_{p..s}$, ce qu'à nouveau la proposition 5.3 exclut.

On peut donc supposer A_1 inversible, et même $A_1 = \mathrm{Id}$ grâce à l'action de P et Q. On peut encore composer par ces matrices si $P = Q^{-1}$, donc réduire A_2 à sa forme de Jordan.

Premier cas : A_2 est une homothétie. On peut alors aussi réduire A_3 à sa forme canonique, d'où trois sous-cas :

1. A_3 est encore une homothétie, et l'on est ramené à $\alpha = \beta'$ et $\alpha' = \beta = 0$. Les orbites correspondantes sous $\mathrm{Gl}_2 \times \mathrm{Gl}_2$ sont de dimension 4, et cette strate est donc de dimension 6;
2. A_3 n'est pas diagonalisable, auquel cas on est ramené à $\alpha = \beta'$ indépendant de β, et $\alpha' = 0$. Les orbites sont de dimension 6, cette strate est donc de dimension 8 (puisque les orbites sont déterminées par la donnée des deux valeurs propres doubles de A_2 et A_3, une fois que l'on s'est ramené à $A_1 = \mathrm{Id}$);
3. A_3 a deux valeurs propres distinctes, et l'on est ramené à $\alpha' = \beta = 0$. Cette strate est de dimension 9.

Deuxième cas : A_2 n'est pas diagonalisable. Si on lui donne sa forme canonique $\left(\begin{smallmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right)$, on peut encore conjuguer $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ par P de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ce qui permet de supposer que $a = 0$ ou $c = 0$. D'où deux sous-cas :

1. si $c = 0$, on est ramené à $\alpha' = 0$. On peut supposer $a \neq d$, sans quoi on retrouve le premier cas. Les vecteurs α, β et β' sont alors indépendants. Les orbites sont de dimension 7, cette strate est donc de dimension 11.
2. si $c \neq 0$, $a = 0$, il existe une base $\gamma, \gamma', \gamma''$ telle que $\alpha = \gamma + e\gamma'$, $\beta = \gamma' + b\gamma''$, $\alpha' = \gamma''$ et $\beta' = \gamma + e\gamma' + d\gamma''$. Cette strate est aussi de dimension 11.

Troisième cas : A_2 a deux valeurs propres distinctes. Quitte à changer de base dans H, on peut supposer A_3 de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Si $c = 0$, on retrouve le deuxième cas, à moins d'avoir aussi $b = 0$, qui redonne le premier cas. On peut donc supposer $c \neq 0$. Autrement dit, on peut supposer que α' et β sont colinéaires, tous deux non nuls, et que les vecteurs α, β, β' sont indépendants. Cette strate est la générique, de dimension 12.

DEUXIÈME ÉTAPE : ESTIMATION DES DIMENSIONS.

Premier cas : On reprend séparément les trois sous-cas.

1. Les équations de symétrie se réduisent à $\alpha \wedge h = C(x)$ et $\alpha \wedge k = C'(x)$. Comme α n'est pas nul, deux composantes sur quatre de chacun des vecteurs h et k sont déterminées, sous réserve que soient vérifiées les relations de compatibilité
$$\alpha \wedge C(x) = \alpha \wedge C'(x) = 0.$$
Dans l'espace des couples (c, c'), ce système est génériquement de rang deux, de rang un en codimension $7f - 1$, et de rang zéro en codimension $14f$.
Selon les cas, on majore donc la dimension par 6 (pour $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$), plus $24f$ (respectivement $17f + 1$ et $10f$, pour c et c'), plus $10af - 2a$ (respectivement $10af - a$ et $10af$, pour x), plus $4a$ (pour les composantes non déterminées de h et k), moins $8f + 4$ (pour les fibres de la projection sur (g, g')). Cette strate est donc de codimension minorée par le minimum de $16a - 16f - 2$, $15a - 9f - 3$ et $14a - 2f - 2$.
2. Ici, les équations de symétrie donnent $\alpha \wedge h + \beta \wedge k = C(x)$ et $\alpha \wedge k = C'(x)$. Comme α et β sont indépendants, ce système détermine la projection de k dans $A^\vee \otimes \mathrm{H}^\vee$, sous réserve des conditions de compatibilité
$$\beta \wedge \alpha \wedge h = \beta \wedge C(x), \quad \alpha \wedge C'(x) = \alpha \wedge C(x) + \beta \wedge C'(x) = 0.$$
La première de ces équations détermine une composante de h. Les deux dernières donnent un système en x qui, dans l'espace des couples (c, c'), est génériquement

de rang deux, de rang un en codimension $9f-1$, et de rang zéro en codimension $14f$. On minore donc la codimension de la strate correspondante en (g,g'), par le minimum de $16a-16f-4$, $15a-7f-5$ et $14a-2f-4$.

3. De la même façon qu'au sous-cas précédent, on minore la codimension de la strate en (g,g'), par le minimum de $16a-16f-5$, $15a-7f-6$ et $14a-2f-5$.

Deuxième cas : On a deux sous-cas.

1. Les équations de symétrie se réduisent à
$$\alpha\wedge h+\beta\wedge k=C(x),\quad \beta'\wedge k=C'(x).$$
Comme β et β' sont indépendants, elles déterminent la projection de k dans $A^\vee\otimes \mathrm{H}^\vee$, sous réserve des conditions de compatibilité
$$\begin{aligned}&\beta\wedge\alpha\wedge h=\beta\wedge C(x),\\ &\beta'\wedge\alpha\wedge h=\beta'\wedge C(x)+\beta\wedge C'(x),\\ &\beta'\wedge C'(x)=0.\end{aligned}$$
On résout d'abord la troisième équation en x puis les deux premières en h. La dernière équation est identiquement nulle en x, en codimension $7f$ dans l'espace des c'. Les deux premières équations déterminent deux composantes de h, puisque les vecteurs α,β et β' sont indépendants, donc $\beta\wedge\alpha$ et $\beta'\wedge\alpha$ aussi. On en déduit que la strate correspondante est de codimension minorée par le minimum de $16a-16f-7$ et $15a-9f-7$.

2. Ici, les conditions de symétrie déterminent la projection de k dans $A^\vee\otimes\mathrm{H}^\vee$, et les relations de compatibilité sont
$$\begin{aligned}\beta\wedge\alpha\wedge h&=\beta\wedge C(x),\\ \beta'\wedge\alpha'\wedge h&=\beta'\wedge C'(x),\\ (\beta'\wedge\alpha+\beta\wedge\alpha')\wedge h&=\beta'\wedge C(x)+\beta\wedge C'(x).\end{aligned}$$
Les trois vecteurs $\beta\wedge\alpha$, $\beta'\wedge\alpha'$ et $\beta\wedge\alpha'+\beta'\wedge\alpha$ sont indépendants, donc la projection de h dans $A^\vee\otimes\mathrm{H}^\vee$ est aussi déterminée. On en déduit que la strate correspondante en (g,g') est de codimension $16a-16f-7$.

Troisième cas : Même estimation qu'au sous-cas précédent, si ce n'est que la dimension de la strate de $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{smallmatrix}\right)$ est supérieure d'une unité. D'où une codimension $16a-16f-8$ au moins.

Cas $r=3$. On doit a priori envisager deux cas selon la répartition $(3+0$ et $2+1)$ du surcroît de rang entre $g_{...}$ et $g'_{...}$. Montrons tout d'abord que le premier cas ne peut pas se présenter. En effet, quitte à changer de coordonnées dans k^{f+2}, on pourrait supposer que $g'_{...}$ est combinaison linéaire des $x_{p..s}$, ce qui n'est pas possible, comme on l'a vu en 5.3, cas a).

Supposons donc que le surcroît de rang dû à g est égal à deux (disons qu'il est dû à $g_{1..}$ et $g_{2..}$), et que celui dû en sus à g' est égal à un (disons qu'il est dû à $g'_{1..}$). On doit alors avoir des relations de dépendance de la forme
$$\begin{aligned}g_{3..}&=ag_{1..}+bg_{2..}+\sum_{ps}l_{ps}x_{p..s},\\ g'_{2..}&=cg_{1..}+dg_{2..}+eg'_{1..}+\sum_{ps}m_{ps}x_{p..s},\\ g'_{3..}&=fg_{1..}+hg_{2..}+kg'_{1..}+\sum_{ps}n_{ps}x_{p..s}.\end{aligned}$$

L'ouvert correspondant est donc paramétré par $g_{11.}, g_{12.}, g_{22.}, g_{14.}, g_{24.}, g'_{11.}, g'_{14.}$ et par les coefficients l_{ps}, m_{ps}, n_{ps}, liés par la seule relation de symétrie $g'_{23.} = g'_{32.}$. Celle-ci se traduit par l'identité

$$\begin{aligned} Ag_{11.} + Bg_{12.} + Cg_{22.} + \sum_{ps} m_{ps}x_{p3.s} + c\sum_{ps} l_{ps}x_{p1.s} + d\sum_{ps} l_{ps}x_{p2.s} + \\ + e\sum_{ps} n_{ps}x_{p1.s} - \sum_{ps} n_{ps}x_{p2.s} - k\sum_{ps} m_{ps}m_{ps}x_{p1.s} = 0, \end{aligned}$$

avec $A = ac + ef - ck$, $B = bc + ad + eh - kd - f$, $C = bd - h$. Si cette relation n'est pas identiquement nulle, a paramètres sont déterminés. Si elle est identiquement nulle, les équations $B = C = 0$ déterminent f et h en fonction des a, b, c, d, e, k. Puis l'annulation des coefficients des $x_{pq.}$ montre que les $m_{p.}$, $p \neq 2$, et les $n_{q.}$, sont déterminés par $m_{2.}$ et les $l_{r.}$, eux-mêmes soumis aux relations

$$\begin{aligned} (c + ed)l_{4.} = 0, \\ (c + ed)(l_{1.} + el_{2.} + l_{3.}) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, la relation $A = 0$ équivaut à $(c + ed)(a - k + eb) = 0$. Au pire, donc, $c + ed = 0$ et $7f + 3$ paramètres au moins sont déterminés. On majore donc la dimension de la strate considérée par le maximum de $12f + 8 + 6a$ et $5f + 5 + 7a$.

Cas $r = 4$**.** On peut supposer que le surcroît de rang dû à g et g' se répartit en $2 + 2$ ou $3 + 1$. Dans le premier cas, on majore la dimension par $10a + 8f + 6$: il n'y a pas de relation de symétrie à prendre en compte.

Dans le second cas, on a des relations de dépendance

$$\begin{aligned} g'_{2..} = ag_{1..} + bg_{2..} + cg_{3..} + dg'_{1..} + \sum_{ps} l_{ps}x_{p..s}, \\ g'_{3..} = eg_{1..} + fg_{2..} + hg_{3..} + kg'_{1..} + \sum_{ps} m_{ps}x_{p..s}. \end{aligned}$$

L'ouvert correspondant est donc paramétré par les $g_{pq.}$, par les $g'_{11.}, g'_{14.}$, et par les coefficients $a, ..., k$ et l_{ps}, m_{ps}, liés par la seule relation de symétrie $g'_{23.} = g'_{32.}$. Celle-ci se traduit par l'identité

$$\begin{aligned} Ag_{11.} + Bg_{12.} + Cg_{13.} - fg_{22.} + (b - h)g_{23.} + cg_{33.} \\ + d\sum_{ps} m_{ps}x_{p1.s} + \sum_{ps} l_{ps}x_{p3.s} - k\sum_{ps} l_{ps}x_{p1.s} - \sum_{ps} m_{ps}x_{p2.s} = 0, \end{aligned}$$

avec $A = de - ak$, $B = df - kb - e$, $C = a + dh - kc$. Si cette relation est identiquement nulle, les paramètres $a, ..., k, l_{ps}$ et m_{ps} sont déterminés par b, d, k et les m_{3s}. La dimension de la strate correspondante est donc majorée par le maximum de $10a+8f+8$ et $11a+f+3$.

Cas $r = 5$**.** Il n'y a qu'un seul cas qui conduit au majorant $14a + 4f + 5$. □

6. Evaluation verselle

Cette section est consacrée à la démonstration du Théorème 1.2 de l'introduction.

PROPOSITION 6.1. – *On suppose* $3a > 11f$, $5b \geq 12a+8$, $b \leq 4a-4f-3$, $2b \leq 7a-f-3$ *et* $f \geq 9a-3b$, *et l'on pose* $\delta = 3b-9a+f$. *Soit* H *un hyperplan fixé quelconque de* V. *Alors, pour* m *en dehors d'un sous-schéma de codimension* $\delta+1$ *de* PW, *le rang de* $m_H(1)$ *vaut* $9a-f$.

Démonstration : On stratifie, par le (Z,H)-rang r de T, le schéma Q des triplets (m,T,Z) avec m dans PW, $Z = Z_m$, et T hyperplan de $Z' = Z \cap (A \otimes H.V)$, tel que $\mathrm{Im}(m_H(1)) \subset T$. On calcule la dimension des strates S_r correspondantes en projetant sur le schéma des couples (Z,T), ce qui donne

$$\dim S_r = d + \dim G_r - rb,$$

où d est la dimension de PW, et les dimensions des strates G_r de l'espace des hyperplans de Z' sont majorées grâce à la proposition 5.3. Comme G_3 est la strate générique, on a $\dim S_3 = d-\delta-1$, et l'on s'assure pour conclure, grâce aux estimations de 5.3, que sous les hypothèses faites sur les entiers a,b,f, les autres strates n'excèdent pas cette dimension. □

PROPOSITION 6.2. – *On suppose* $3a > 11f$, $5b \geq 12a+8$, $b \leq 4a-4f-6$, $4b \leq 13a-5f-5$, $5b \leq 16a-2f-5$ *et* $\delta = 3b-9a+f \geq 0$. *Alors, pour* m *en dehors d'un sous-schéma de codimension* $2\delta+4$ *de* PW, *le rang de* $m_H(1)$ *vaut au moins* $9a-f-1$, *et le lieu où il vaut* $9a-f-1$ *est lisse de codimension* $\delta+1$.

Démonstration : On stratifie cette fois par le (Z,H)-rang r de T, le schéma Q' des triplets (m,T,Z) avec m dans PW, $Z = Z_m$, et T sous-espace de codimension deux de $Z' = Z \cap (A \otimes H.V)$ tel que $\mathrm{Im}(m_H(1)) \subset T$. On calcule la dimension des strates S'_r correspondantes en projetant sur le schéma des couples (Z,T), ce qui donne

$$\dim S'_r = d + \dim G'_r - rb,$$

où d est à nouveau la dimension de PW, et les dimensions des strates G'_r de la grassmannienne des sous-espaces de codimension deux de Z' sont majorées par la proposition 5.5. Comme G'_6 est la strate générique, $\dim S'_6 = d-2\delta-4$, et l'on s'assure grâce aux estimations de 5.5, que sous les hypothèses faites sur les entiers a,b,f, les autres strates n'excèdent pas cette dimension, ce qui se traduit par l'inégalité

$$(6-r)b < \mathrm{codim}\, G'_r \qquad \text{pour } r < 6.$$

Cette vérification, fastidieuse mais élémentaire, assure le premier point de la proposition, selon lequel le rang de $m_H(1)$ vaut au moins $9a-f-1$ en dehors d'un sous-schéma de PW de codimension au moins $2\delta+4$.

Par ailleurs, on s'assure que sous nos hypothèses, les strates S_1 et S_2 introduites dans la démonstration de la proposition précédente, ont une image dans PW de codimension au moins $2\delta+4$. Reste donc, pour conclure, à démontrer la lissité du schéma S des m de PW pour lesquels l'image de $m_H(1)$ est de codimension $f+1$ dans $A \otimes H.V$, et de (Z_m,H)-rang trois. Or c'est un fait général concernant les stratifications par le rang d'un schéma X, que la strate $\mathrm{W}^i - \mathrm{W}^{i+1}$ où le rang du morphisme $u : k^p \to k^q$ vaut disons s, s'identifie schématiquement à la strate correspondante $G^i - G^{i+1}$ dans $X \times G$, où G désigne la grassmannienne des sous-espaces de dimension s de k^q (cf. [1], p. 69, 84). Dans le cas qui nous occupe, il nous suffit donc de montrer que le schéma des couples (m, T), avec m dans S et $T = \mathrm{Im}\,(m_H(1))$, est lisse. Ce schéma s'identifie à son tour au schéma S' des quadruplets (m, T, Z', Z) de Q' vérifiant les mêmes conditions : m dans S et $T = \mathrm{Im}\,(m_H(1))$ (et toujours T de (Z_m, H)-rang 3). Enfin, S' est lisse parce que c'est un ouvert d'un fibré vectoriel sur le schéma lisse des couples (T, Z) vérifiant $T \subset Z' = Z \cap (A \otimes H.V)$. □

Rappelons que le morphisme d'évaluation

$$\mathrm{H}^0(E_m(1)) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow E_m(1)$$

est dit *versel* si les lieux où il est de rang constant sont lisses de la codimension attendue (cf. [3], 6).

THÉORÈME 6.3. – *On suppose f strictement positif, et*

$$9a - 3b \leq f \leq \min\left(\frac{3a-1}{11}, \frac{13a-4b-5}{5}, \frac{16a-5b-5}{2}\right).$$

Alors, pour m générique dans PW, le fibré vectoriel $E_m(1)$, noyau du morphisme correspondant de $B \otimes \mathcal{O}(1)$ vers $A \otimes \mathcal{O}(2)$, est d'évaluation verselle.

Démonstration : On remarque d'abord que le rang du morphisme d'évaluation de $E_m(1)$ est à une constante près la fonction $H \mapsto \mathrm{rang}(m_H(1))$ (et ce même au sens fort de [6]), en vertu du diagramme exact :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathrm{H}^0(E_m(1)) & \xrightarrow{ev} & E_m(1)_h & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B \otimes H & \longrightarrow & B \otimes V & \longrightarrow & B \otimes \mathcal{O}(1)_h & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow {\scriptstyle m_H(1)} & & \downarrow {\scriptstyle m(1)} & & \downarrow {\scriptstyle m_h(1)} & & \\
0 & \longrightarrow & A \otimes H.V & \longrightarrow & A \otimes \mathrm{S}^2 V & \longrightarrow & A \otimes \mathcal{O}(2)_h & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On stratifie donc l'ensemble $PW \times \mathbb{P}^3$ des couples (m, H) par le rang de $m_H(1)$. D'après la proposition précédente, modulo codimension quatre au moins, ce rang vaut $r = 9a - f$, sauf le long d'un sous-schéma lisse de codimension $\delta + 1$ où il vaut $r - 1$. Par le théorème de lissité générique (en caractéristique nulle), ceci reste vrai pour m générique dans PW.□

7. Application aux courbes

Une courbe générique C de $\mathbb{P}^3$ est dite *à résolution linéaire* si son idéal $\mathcal{I}_C$ admet une résolution de la forme :

$$0 \longrightarrow a.\mathcal{O}(-s-2) \longrightarrow b.\mathcal{O}(-s-1) \longrightarrow c.\mathcal{O}(-s) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

On a vu dans l'introduction que si le morphisme $a.\mathcal{O}(-s-2) \to b\mathcal{O}(-s-1)$ est considéré comme morphisme m de B vers $A \otimes V$, alors $m(1)$ est de rang au plus $3b + a - 1$. En particulier, si $b \leq 3a$, le morphisme m ne peut être générique.

DÉFINITION 7.1. – *Nous dirons qu'une courbe générique à résolution linéaire de type* (a, b) *est* prédominante *(rlp) si l'image de* $m(1)$ *est un sous-espace générique (en ce sens que son image dans le quotient de la grassmannienne par* $Gl(A)$ *est le point générique) de dimension* $\min(10a, 3b + a - 1)$ *de* $A \otimes S^2V$.

Rappelons que les courbes génériques à résolution linéaire dominante introduites dans [3] pour $b > 3a$, ont $m(1)$ surjectif et sont donc rlp.

THÉORÈME 7.2. – *Pour* $b > (3 - \frac{1}{11})a + \frac{10}{11}$ *et* $a \geq 7$, *il existe dans* $\mathbb{P}^3$ *une unique courbe générique lisse, géométriquement connexe, à résolution linéaire prédominante de type* (a, b).

Démonstration : Le cas $b > 3a$ a été traité dans [3]. On suppose donc $b \leq 3a$, et l'on pose $c = b - a + 1$, $s = b - 2a$ et $f = 9a - 3b + 1$. On vérifie sans peine que sous l'hypothèse faite sur a et b, on peut appliquer 6.3. Considérons donc la matrice m et le fibré $E_m(1)$ donnés par 6.3. On sait que $h^0(E_m(1)) = c$ et que $E_m(1)$ est d'évaluation verselle. En dualisant le morphisme d'évaluation on obtient un morphisme versel de $E_m(1)^\vee$ vers $c.\mathcal{O}$. Comme $E_m(1)^\vee$ est de rang $c - 1$, le conoyau de ce morphisme est de la forme $\mathcal{I}_C(s)$ où $\mathcal{I}_C$ est l'idéal d'une courbe lisse C, rlp de type (a, b).

Cette courbe est géométriquement connexe puisque $h^1(\mathcal{I}_C) = 0$. En effet,

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{I}_C) = \mathrm{H}^2(E_m(1)^\vee(-s)),$$

qui est le noyau du morphisme induit par m de $a.\mathrm{H}^3(\mathcal{O}(-s-2))$ vers $b.\mathrm{H}^3(\mathcal{O}(-s-1))$. Pour montrer que ce morphisme est injectif, il suffit de s'assurer que son dual de Serre, qui est le morphisme induit par m de $b.\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(s-3))$ vers $a.\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(s-2))$, est surjectif. Mais cela résulte du point 2 du théorème 4.2.

Observons enfin que C est générique. En effet, une généralisation C' de C a une résolution du même type (cf. [3], démonstration de 7.1). Soit m' la matrice correspondante. L'image de $m'(1)$ est encore de codimension f (car $h^0(E_{m'}(1)) = c$), et généralise par conséquent celle de $m(1)$. Cette image est donc le sous-espace générique de codimension f de $A \otimes S^2V$: par conséquent, C' est rlp. Or toute courbe C' générique rlp de type (a, b) est égale à C. En effet, $m' = m$ à extension des scalaires près, puisque m est la matrice générique telle que $m(1)$ ait pour image le sous-espace générique de codimension f de $A \otimes S^2V$. Comme C' est le lieu de dégénérescence du morphisme d'évaluation de $E_{m'}(1)$, elle est bien égale à C. □

Remarque 7.3 L'énoncé précédent est tout près d'être optimal. Supposons en effet que $b < (3 - \frac{1}{11})a + \frac{1}{3}$. Alors d'après la remarque 5.4, si H est fixé et Z générique de codimension $f = 9a - 3b + 1$ dans $A \otimes S^2V$, l'image de $m_H(1)$ est incluse dans un hyperplan de Z'. Ceci exclut l'existence d'une courbe générique rlp de type (a, b).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, Ph. GRIFFITHS et J. HARRIS, Geometry of algebraic curves, *Grundleheren der math. Wissenschaften*, vol. 267, Springer, 1985.
[2] I. DOLGACHEV et M. KAPRANOV, Arrangements of hyperplanes and vector bundles on $\mathbb{P}^n$, *Duke Math. J.*, vol. 71, 1993, p. 633-664.
[3] Ph. ELLIA et A. HIRSCHOWITZ, Voie ouest 1 : génération de certains fibrés sur les espaces projectifs et application, *J. of Algebraic Geometry*, vol. 1, 1992, p. 531-547.
[4] J. HARRIS, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves (II) : the even genus case, *Inventiones Math.*, vol. 75, 1984, p. 437-466.
[5] J. HARRIS et D. MUMFORD, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Inventiones Math.*, vol. 67, 1982, p. 23-86.
[6] A. HIRSCHOWITZ, *Nouvelles fonctions constructibles et rang des images directes*, in Algebraic curves and projective geometry, Proc. Trento 1988, L.N.M. 1389, 1989, p. 103-111.

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1998;
accepté après révision le 2 avril 1999.)

Ph. ELLIA
Dipartimento di Matematica,
35 via Machiavelli, I-44100 Ferrara

A. HIRSCHOWITZ
Université de Nice — Sophia-Antipolis,
Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2

L. MANIVEL
Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS,
Université J. Fourier,
BP 74, F-38402 Saint-Martin d'Hères