ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 33, nº 6 (2000), p. 789-821
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_2000_4_33_6_789_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 33, 2000, p. 789 à 821.

POINTS DE PETITE HAUTEUR SUR LES VARIÉTÉS SEMI-ABÉLIENNES

PAR ANTOINE CHAMBERT-LOIR

RÉSUMÉ. – Dans ce texte, nous étendons au cas des variétés semi-abéliennes les énoncés de diverses variantes de la conjecture de Bogomolov concernant la non-densité des points de petite hauteur. Inspirés par les travaux récents de Ullmo, Zhang et Bilu, nous démontrons ensuite ces conjectures lorsque la variété semi-abélienne est isogène à un produit d'une variété abélienne et d'un tore. La démonstration utilise la géométrie d'Arakelov et des arguments d'équirépartition. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – We extend to the case of semi-abelian varieties the statements of various variants of the conjecture *alla* Bogomolov about the non-density of small points of small height in abelian varieties. Inspired by recent work of Ullmo, Zhang and Bilu, we then prove these conjectures when the semi-abelian variety is almost split. The proof uses Arakelov geometry and equirepartition arguments. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction

Cet article expose quelques propriétés des hauteurs sur des variétés semi-abéliennes vues sous l'angle de la théorie d'Arakelov.

Soient k un corps de nombres et G une variété semi-abélienne (c'est-à-dire une extension $0 \to T \to G \to A \to 0$ d'une variété abélienne A par un tore T) définie sur k. En tant que groupe algébrique, il est quasi projectif ; on dispose donc de hauteurs de Weil.

À tout triplet $(X, D, \mathcal{L})$ constitué d'une compactification équivariante lisse $T \hookrightarrow X$ du tore, d'un diviseur ample T-invariant sur X et d'un faisceau inversible, ample et symétrique sur A, nous attachons dans cet article un représentant canonique de la hauteur de Weil. Cette *hauteur normalisée* se comporte bien sous l'action des morphismes de multiplication par un entier positif ; quand $T = 1$, elle coïncide avec la hauteur de Néron–Tate, tandis qu'elle redonne la «hauteur naïve» (de Weil–Mahler) usuelle quand $A = 0$ et X est l'espace projectif. En utilisant la théorie des métriques adéliques de S. Zhang, nous définissons aussi la hauteur canonique d'une sous-variété de $G \otimes \overline{k}$.

Ceci fait, on est en droit de tenter de généraliser aux variétés semi-abéliennes les résultats de Ullmo [30] et Zhang [35] concernant la conjecture de Bogomolov.

Le résultat principal de cet article est le suivant (*voir* le paragraphe 5, conjectures 5.1, 5.2 et 5.3 et le théorème 6.1) où, conformément à l'usage, nous appellerons *sous-variété de torsion* d'une variété semi-abélienne G définie sur un corps algébriquement clos, toute sous-variété qui est la translatée par un point de torsion d'un sous-groupe algébrique connexe de G.

THÉORÈME. – *Soient k un corps de nombres et G une variété semi-abélienne définie sur k* isotriviale, *c'est-à-dire isogène au produit d'une variété abélienne et d'un tore. On a les trois énoncés suivants.*

(a) Équirépartition des petits points : *soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de $G(\overline{k})$ dont la hauteur normalisée tend vers 0 et telle qu'aucune sous-suite ne soit contenue dans un sous-groupe algébrique strict. Alors, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de mesures sur $G(\mathbf{C})$, définie par*

$$\mu_n = \frac{1}{[k(x_n):k]} \sum_{\sigma\,:\,k(x_n)\hookrightarrow\mathbf{C}} \delta_{\sigma(x_n)}$$

(si $x \in G(\mathbf{C})$, δ_x désigne comme d'habitude la mesure de Dirac au point x), converge vaguement vers la mesure de Haar normalisée supportée par le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$.

(b) Sous-variétés de hauteur nulle : *soit X une sous-variété fermée irréductible de $G \otimes \overline{k}$. La hauteur normalisée de X est positive ou nulle ; elle est nulle si et seulement si X est une sous-variété de torsion de G.*

(c) Non-densité des petits points : *soit X une sous-variété fermée de G.*

(1) *l'ensemble des sous-variétés de torsion de G contenues dans X n'a qu'un nombre fini d'éléments maximaux ;*

(2) *notons X^* le complémentaire dans X de la réunion des sous-variétés de torsion contenues dans X, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble des points de $X^*(\overline{k})$ dont la hauteur normalisée est inférieure à ε est vide.*

Notons que cette hauteur normalisée n'intervient dans le premier alinéa du théorème ci-dessus que sous la forme : «les hauteurs d'une suite de points tendent vers 0», et on peut vérifier que cette notion ne dépend que de G. De même, pour l'existence d'une minoration de la hauteur normalisée des points de X^* dans le troisième alinéa.

Le théorème, en tout cas son deuxième alinéa, est *faux* si l'on omet l'hypothèse que G est isotriviale, *cf.* le théorème 5.6.

L'équivalence des deuxième et troisième alinéas du théorème résulte plus ou moins formellement des travaux de S. Zhang [33,34] sur l'amplitude arithmétique. Dans le cas où $T = 1$, L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang ont prouvé dans [29] que les deux premiers alinéas du théorème (équirépartition *vs.* conjecture de Bogomolov) sont aussi équivalents.

À ce propos, notons que le point 1) de l'alinéa c) du théorème n'est pas nouveau : M. Hindry l'a en effet démontré (*voir* [14]) pour tout groupe algébrique commutatif. Cependant, nous n'avons pas besoin d'utiliser son théorème : sous l'hypothèse que la variété semi-abélienne est isotriviale, c'est un corollaire de l'approche arakelovienne de ces questions. Le cas $T = 1$ est dû à M. Raynaud [25] tandis que le cas $A = 0$ a été prouvé par M. Laurent [19].

Lorsque $T = 1$, ce théorème a été démontré récemment par E. Ullmo [30] pour une courbe dans sa Jacobienne, puis presque immédiatement généralisé par S. Zhang [35] ; peu après, S. David et P. Philippon ont démontré dans [10] l'existence d'une minoration de la hauteur normalisée des sous-variétés qui ne sont pas des variétés de torsion.

Lorsqu'en revanche $A = 0$, le premier alinéa du théorème est un théorème de Y. Bilu [3], alors que le deuxième alinéa a été démontré dans le cas d'une hypersurface par W. Lawton dans [20], puis dans le cas général par S. Zhang [33] en lien avec le troisième alinéa.

Dans le cas où $G = A \times T$ est un produit, l'équirépartition d'une suite de petits points $(x_n = (z_n, t_n))$ est ainsi un théorème une fois projeté sur chacun des facteurs A et T. Il convient d'insister sur le fait que cela n'implique pas notre théorème, qui peut être vu comme une démonstration de l'*indépendance* des deux variables aléatoires (z_n) et (t_n).

Nous démontrons ce théorème en suivant la voie inaugurée par E. Ullmo, c'est-à-dire à l'aide d'arguments d'équirépartition. Cependant, les métriques hermitiennes naturelles dans le contexte des variétés semi-abéliennes sortent du cadre classique de la géométrie d'Arakelov :

- elles ne sont pas lisses ; cela oblige d'une part à définir les hauteurs par un procédé limite en recourant à la théorie des métriques adéliques de Zhang, et d'autre part à définir divers objets analytiques par approximation via un théorème dû à Bedford–Taylor et Demailly qui permet d'effectuer des produits de courants sous des hypothèses de positivité. L'utilité de cette théorie en géométrie d'Arakelov est apparue pour la première fois dans les travaux de V. Maillot [21] concernant la géométrie d'Arakelov des variétés toriques ;
- les «courants de courbure» qui interviennent sont concentrés sur le sous-groupe compact maximal, ce qui engendre des complications techniques. Pour les contourner, nous traitons tout d'abord le cas du rang torique 1 (*voir* le lemme 6.4 et l'appendice quand $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$). Nous utilisons ensuite un argument de Bilu pour passer au cas général.

Comme il nous a semblé que le cas du groupe multiplicatif plongé naturellement dans $\mathbf{P}^1$ éclairait la situation, sans pour autant contenir les complications liées aux variétés abéliennes, nous avons inclus ce cas dans un appendice ; nous conseillons bien sûr au lecteur de le lire en premier.

Signalons enfin que ce théorème a été utilisé récemment par B. Poonen [24] pour prouver un théorème sur les variétés semi-abéliennes isotriviales qui combine les énoncés de type Mordell–Lang (prouvé par M. McQuillan, [22]) et Bogomolov. Ce théorème serait d'ailleurs démontré pour les variétés semi-abéliennes quelconques dès que l'on aurait prouvé les alinéas a) et c) sans l'hypothèse d'isotrivialité.

Le plan de cet article est le suivant : les § 1 et 2 contiennent des rappels préliminaires de géométrie d'Arakelov (particulièrement en ce qui concerne la théorie des métriques adéliques de S. Zhang) et des compléments concernant les métrisations des fibrés inversibles sur les variétés abéliennes.

La construction des hauteurs canoniques est faite au § 3 et dans le § 4 qui lui fait suite, nous calculons la hauteur d'une variété semi-abélienne compactifiée à l'aide du plongement $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t \hookrightarrow \mathbf{P}^t$.

Nous énonçons au § 5 les différentes variantes de la conjecture de Bogomolov et précisons en détail leurs liens. Puis, dans les § 6 et 7, nous démontrons le théorème principal.

1. Préliminaires de géométrie d'Arakelov

Pour la commodité du lecteur, nous commençons par rappeler brièvement dans ce paragraphe quelques résultats de géométrie d'Arakelov dont nous ferons par la suite un usage constant.

1.1. Géométrie complexe

Rappelons quelques notations de géométrie complexe. Soit X une variété analytique complexe. On note ∂ et $\overline{\partial}$ les composantes holomorphe et antiholomorphe de la différentielle extérieure $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$ sur les formes (voire les courants) sur X. On note $\mathrm{d}^{\mathrm{c}} = (i/4\pi)(\overline{\partial} - \partial)$, si bien que $\mathrm{dd}^{\mathrm{c}} = -\mathrm{d}^{\mathrm{c}}\mathrm{d} = (i/2\pi)\partial\overline{\partial}$.

On appellera *fibré en droites hermitien* sur X un couple $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ constitué d'un fibré en droites holomorphe sur X et d'une métrique hermitienne continue sur $\mathcal{L}$.

Si X est lisse, on attache à un fibré en droites hermitien un courant de type $(1,1)$ appelé *courant de courbure* et défini localement par

$$\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) = -\mathrm{dd}^{\mathrm{c}} \log \|\mathsf{s}\|^2,$$

où s est une section locale de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas (cela ne dépend pas du choix de s). Si la métrique hermitienne sur $\mathcal{L}$ est lisse, son courant de courbure est en fait une forme différentielle, dite *forme de courbure.*

On dira qu'un courant T de type (p,p) est *positif* si pour tout choix de formes différentielles de type $(1,0)$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur X, $(\omega_1,\dots,\omega_{d-p})$, d désignant la dimension de X, le courant

$$T\wedge(i\alpha_1\wedge\overline{\alpha}_1)\wedge\cdots\wedge(i\alpha_{d-p}\wedge\overline{\alpha}_{d-p})$$

est une mesure positive sur X. Quand $T=\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$, cela équivaut à dire que la métrique hermitienne sur $\mathcal{L}$ s'écrit (dans une trivialisation locale $\iota:\mathcal{L}\simeq\mathcal{O}_X$) $\|\mathsf{s}\|^2(x)=|\iota(\mathsf{s})(x)|^2\exp(-u(x))$, où u est une fonction pluri-sous-harmonique (psh pour abréger) sur X.

1.2. Cas des espaces singuliers

Soit X un espace analytique complexe réduit. Suivant [33], on dira qu'une fonction f sur X est $\mathcal{C}^\infty$ si pour tout morphisme analytique $\varphi:U\to X$ d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ vers X, la composée φ^*f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On définit de même la notion de forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$, de fonction psh sur X.

Un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur X sera dit $\mathcal{C}^\infty$ (resp. à courbure positive) si dans toute trivialisation locale, la métrique est donnée par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (resp. psh). Cela revient à dire que pour tout morphisme analytique $\varphi:U\to X$ d'un ouvert de $\mathbf{C}^n$ vers X, le fibré en droites hermitien $\varphi^*\overline{\mathcal{L}}$ sur U est muni d'une métrique lisse (resp. à courbure positive).

On commettra aussi l'abus de langage consistant à écrire que, $\overline{\mathcal{L}}$ étant un fibré en droites hermitien sur un espace analytique complexe, le courant $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$ est positif. Cela signifiera que la métrique est donnée par une fonction continue et psh.

1.3. Métriques adéliques

Soient X une variété projective sur un corps de nombres k et $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur X.

La géométrie d'Arakelov considère alors la donnée d'un modèle projectif et plat $\widetilde{X}$ sur l'anneau $\mathfrak{o}_{k'}$ des entiers d'une extension finie k' de k, d'un fibré inversible $\widetilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{X}$ dont la restriction à la fibre générique est une puissance de $\mathcal{L}$, et d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ sur $X(\mathbf{C})$, supposée invariante par la conjugaison complexe. Si w est une place finie de k', on déduit du modèle entier une norme w-adique sur les fibres de $\mathcal{L}$ en décrétant que les sections entières en w ont une norme $\leqslant 1$. Si pour toute place v de k, les métriques w-adiques aux places w de k' au-dessus de v sont invariantes par les groupes de Galois locaux, une telle donnée détermine une collection de normes v-adiques sur $\mathcal{L}$, appelée *métrique adélique algébrique* sur $\mathcal{L}$.

Plus généralement, on dit ([34], 1.2) qu'une collection (ρ_v) de normes v-adiques sur les fibres de $\mathcal{L}$ est une *métrique adélique* s'il existe une métrique adélique algébrique (τ_v) sur $\mathcal{L}$ telle que :
- pour toute place v, le rapport τ_v/ρ_v est une fonction continue bornée sur $X(\overline{k}_v)$, invariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v)$;
- pour presque toute place non archimédienne v, $\tau_v=\rho_v$.

Une suite de métriques adéliques $(\rho_{v,n})_n$ converge vers une métrique adélique (ρ_v) si pour presque tout v, la suite $\rho_{v,n}=\rho_v$, et si pour tout v, la suite $\log(\rho_{v,n}/\rho_v)$ converge uniformément vers 0.

En géométrie d'Arakelov, les métriques adéliques qui interviennent sont limites de métriques adéliques algébriques particulières : on dit qu'une métrique adélique algébrique est *ample* (resp. *semi-positive*) si, avec les mêmes notations que ci-dessus, $\widetilde{\mathcal{L}}$ est ample sur $\widetilde{X}$ (resp. a un degré $\geqslant 0$ sur toute courbe contenue dans une fibre verticale de $\widetilde{X}$) et si la forme de courbure de $\mathcal{L}$ en les places archimédiennes est strictement positive (resp. positive ou nulle). Une métrique adélique est dite *ample* (resp. *semi-positive*) si elle est limite de métriques adéliques algébriques amples (resp. semi-positives).

Le produit tensoriel de deux métriques adéliques définit encore une métrique adélique ; de même, la métrique adélique duale est définie naturellement. On dit ainsi qu'une métrique adélique (ρ_v) sur $\mathcal{L}$ est *intégrable* s'il existe deux fibrés inversibles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sur X munis de métriques adéliques semi-positives $(\rho_{1,v})$ et $(\rho_{2,v})$ tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^\vee$ et $\rho_v = \rho_{1,v} \otimes \rho_{2,v}^\vee$ (*cf.* [34], 1.3). On notera couramment $\overline{\mathcal{L}}$ pour désigner la donnée d'un fibré inversible $\mathcal{L}$ et d'une métrique adélique sur $\mathcal{L}$.

1.4. Hauteurs

Ces métriques adéliques permettent de définir des nombres d'intersection arithmétique et la hauteur des sous-variétés. En effet, Zhang étend dans [34] la théorie de l'intersection arithmétique de Gillet–Soulé ([12], *voir* aussi [28] pour une introduction et [7] pour un exposé détaillé des hauteurs dans ce point de vue). Il prouve en effet que si $\overline{\mathcal{L}}_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant \dim V + 1$) sont des fibrés en droites sur X munis de métriques adéliques semi-positives et si V est une sous-variété fermée de X, les nombres d'intersection arithmétique

$$\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\widetilde{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{\mathrm{c}}_1(\widetilde{\mathcal{L}}_{\dim V+1}) \mid V\big)$$

(calculés à l'aide d'une désingularisation générique de V et d'un modèle entier $(\widetilde{V}, (\widetilde{\mathcal{L}}_i))$, comme dans [7], 2.3, si ce n'est que nous ne nous intéressons qu'au degré arithmétique $\widehat{\deg}$ de l'élément calculé dans *loc.cit.*) convergent lorsque les métriques adéliques des $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ approchent celles des $\overline{\mathcal{L}}_i$ ([34], Th. 1.4). La limite, indépendante de la suite approximante, est notée naturellement

$$\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}_{\dim V+1}) \mid V\big).$$

Si V est fixé, cela définit une application linéaire en chacun des fibrés, ce qui permet d'étendre la définition à tous les fibrés en droites munis de métriques adéliques intégrables.

Lorsque $\mathcal{L}$ est un fibré en droites gros (ce qui veut dire que $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})^{\dim X} > 0$) muni d'une métrique adélique semi-positive (voire intégrable), on définit la *hauteur de* V relativement à $\overline{\mathcal{L}}$ par la formule

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(V) = \frac{1}{(\dim V + 1)\deg_{\mathcal{L}} V}\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{\dim V+1} \mid V\big).$$

Si $x \in X(k)$ est un point rationnel, on a

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = -\sum_{\text{places } v \text{ de } k} [k_v : \mathbf{Q}_v] \log \|\mathsf{s}\|_v(x);$$

cette expression étant indépendante du choix d'une section non nulle $\mathsf{s} \in \mathcal{L}_x$. Cette dernière formule a un sens si $\overline{\mathcal{L}}$ est un fibré en droites muni d'une métrique adélique quelconque et la fonction $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}$ est alors un représentant de la hauteur de Weil pour $\mathcal{L}$.

Un théorème fondamental de S. Zhang relie les hauteurs des points et celles des sous-variétés de X pour un fibré en droites muni d'une métrique adélique ample. Si $\overline{\mathcal{L}}$ est un fibré en droites sur X muni d'une métrique adélique intégrable, on note

$$\mu_{\overline{\mathcal{L}}}(X) = \inf_{x \in X(\overline{k})} \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \quad \text{et} \quad e_{\overline{\mathcal{L}}}(X) = \sup_{Y \subsetneq X} \inf_{x \notin Y(\overline{k})} \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x).$$

Ce sont des éléments de $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ respectivement.

THÉORÈME 1.5 (*cf.* [34], Th. 1.10). – *Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible gros muni d'une métrique adélique semi-positive et tel que $\mu_{\overline{\mathcal{L}}}(X) \neq -\infty$. Alors, on a l'inégalité*

$$e_{\overline{\mathcal{L}}}(X) \geqslant \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(X) \geqslant \frac{1}{\dim X + 1}\bigl(e_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + (\dim X)\mu_{\overline{\mathcal{L}}}(X)\bigr).$$

Démonstration. – Ce théorème est prouvé dans [34] lorsque la métrique adélique est ample (ce qui implique que $\mu_{\overline{\mathcal{L}}} > -\infty$).

Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une désingularisation générique de X et $\overline{\mathcal{M}}$ un fibré inversible muni d'une métrique adélique ample sur $\widetilde{X}$. Pour $a \in \mathbf{N}^*$, soit $\overline{\mathcal{M}_a} = \pi^* \overline{\mathcal{L}}^{\otimes a} \otimes \overline{\mathcal{M}}$; c'est un fibré en droites ample sur $\widetilde{X}$ muni d'une métrique adélique semi-positive. D'après le théorème d'approximation 3.6.1 de [21], $\overline{\mathcal{M}_a}$ est un fibré inversible muni d'une métrique adélique ample. On peut lui appliquer le théorème 1.10 de [34], d'où l'inégalité

$$(\dagger) \qquad e_{\overline{\mathcal{M}_a}}(\widetilde{X}) \geqslant \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}_a}}(\widetilde{X}) \geqslant \frac{1}{1 + \dim X}\bigl(e_{\overline{\mathcal{M}_a}}(\widetilde{X}) + \mu_{\overline{\mathcal{M}_a}}(\widetilde{X})\bigr).$$

Or, en utilisant la multilinéarité des produits d'intersection, on voit que lorsque a tend vers $+\infty$,

(1) $a^{-\dim X} \mathrm{c}_1(\pi^*\mathcal{L}^{\otimes a} \otimes \mathcal{M})^{\dim X}$ converge vers $\mathrm{c}_1(\pi^*\mathcal{L})^{\dim X} = \mathrm{c}_1(\mathcal{L})^{\dim X}$ d'après la formule de projection ;

(2) de même, $a^{-1-\dim X}\bigl(\widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^*\overline{\mathcal{L}}^{\otimes a} \otimes \overline{\mathcal{M}})^{1+\dim X} \mid \widetilde{X}\bigr)$ converge vers $\bigl(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{1+\dim X} \mid X\bigr)$;

(3) comme $\mu_{\overline{\mathcal{L}}} \neq -\infty$, $a^{-1}\mu_{\overline{\mathcal{M}_a}}$ tend vers $\mu_{\overline{\mathcal{L}}}$;

(4) et finalement, puisque π est birationnel, $a^{-1} e_{\overline{\mathcal{M}_a}}$ tend vers $e_{\overline{\mathcal{L}}}$.

Lorsqu'on divise les trois membres de l'inégalité ($\dagger$) par a et qu'on fait tendre a vers $+\infty$, on obtient l'inégalité souhaitée. □

1.6. Théorie de Bedford–Taylor

En un certain sens, la théorie des métriques adéliques est une complétion de la théorie d'Arakelov usuelle, en tout cas en ce qui concerne des produits de premières classes de Chern arithmétiques. Elle fait intervenir des limites d'intégrales de formes différentielles positives et le fait remarquable est que la limite de ces formes existe souvent en tant que courant.

PROPOSITION-DÉFINITION 1.7. – *Soient $\mathcal{L}_j$ (pour $1 \leqslant j \leqslant d$) des fibrés en droites sur une variété projective complexe X de pure dimension d, munis de métriques hermitienne continues ω_j que l'on suppose limites uniformes de métriques hermitiennes $\omega_{j,k}$ lisses à formes de courbure positives.*

Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X (i.e. *un morphisme birationnel propre tel que $\widetilde{X}$ est lisse). Les formes différentielles $\bigwedge_{j=1}^{d} \mathrm{c}_1(\pi^*\mathcal{L}_j, \pi^*\omega_{j,k})$ sur $\widetilde{X}$ convergent vers un courant positif fermé sur $\widetilde{X}$. Son image par π_* est une mesure sur X indépendante du choix de $\widetilde{X}$. On la note $\bigwedge_{j=1}^{d} \mathrm{c}_1(\mathcal{L}_j, \omega_j)$; cette expression est linéaire symétrique en les $(\mathcal{L}_j, \omega_j)$.*

Si tous les fibrés sont égaux à $(\mathcal{L}, \omega)$, on définit ainsi $\mathrm{c}_1(\mathcal{L}, \omega)^d$ qui est une mesure positive sur X. Si elle donne à X une mesure non nulle, on notera $\nu_{\mathcal{L},\omega}$ l'unique mesure de probabilité proportionnelle à $\mathrm{c}_1(\mathcal{L}, \omega)^d$.

Démonstration. – C'est essentiellement une reformulation des résultats de Bedford–Taylor et Demailly (*cf.* [1], [11]) sur l'opérateur de Monge–Ampère. Commençons par prouver le résultat concernant la limite de courants sur $\widetilde{X}$. Le problème étant local, quitte à choisir une partition de l'unité finie de $\widetilde{X}$, il n'est pas restrictif de supposer que les fibrés $\mathcal{L}_j$ sont triviaux. Les métriques

ω_j et $\omega_{j,k}$ correspondent alors à des fonctions u_j (continue) et $u_{j,k}$ (lisse) sur $\widetilde{X}$ via la formule

$$\omega_j(f)(x) = |f(x)|\,\mathrm{e}^{-u_j(x)}.$$

De plus, $u_{k,j}$ converge uniformément vers u_j sur $\widetilde{X}$ et

$$\mathrm{c}_1(\pi^*\mathcal{L}_j, \pi^*\omega_{j,k}) = \mathrm{dd}^c u_{j,k}.$$

D'après, par exemple, le corollaire 2.6 de [11], le produit $\bigwedge_{j=1}^{d}(\mathrm{dd}^c u_{j,k})$ converge au sens des courants vers un courant positif fermé, noté $\bigwedge_{j=1}^{d}(\mathrm{dd}^c u_j)$, sur $\widetilde{X}$. Comme il est de degré (d,d), c'est une mesure.

Pour démontrer que l'image de cette mesure sur X est indépendante du choix de la résolution des singularités choisie, remarquons qu'on peut «coiffer» deux résolutions $\widetilde{X}_1 \to X$ et $\widetilde{X}_2 \to X$ par une troisième $\widetilde{X}_3 \to \widetilde{X}_1 \times_X \times \widetilde{X}_2 \to X$. Il suffit alors de démontrer que la mesure calculée sur $\widetilde{X}_3$ poussée sur $\widetilde{X}_1$ est égale à la mesure calculée sur $\widetilde{X}_1$. Il est clair qu'elles coïncident là où $\widetilde{X}_3 \to \widetilde{X}_1$ est un isomorphisme. Le complémentaire dans $\widetilde{X}_3$ est un fermé algébrique de dimension $< d$; c'est un ensemble pluripolaire qui est donc de mesure nulle pour la mesure $(\mathrm{dd}^c u_3)^d$, *voir* par exemple [15], proposition 4.6.4. □

Les mesures données par la proposition précédente apparaissent naturellement en géométrie d'Arakelov. C'est dans le travail de V. Maillot [21] sur la géométrie d'Arakelov des variétés toriques qu'elles ont été introduites pour la première fois de manière générale.

Nous utiliserons le calcul suivant :

PROPOSITION 1.8. – *Soient X une variété projective définie sur un corps de nombres $k \subset \mathbf{C}$ et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites (gros) sur X muni d'une métrique adélique semi-positive. Soit $f : X(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un fibré inversible ample métrisé $\overline{\mathcal{M}}$ sur X dont la métrique hermitienne sous-jacente a une courbure $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})$ positive et tel que $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}}) + \mathrm{dd}^c f$ est un courant positif. Définissons le fibré inversible métrisé $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$ comme $\overline{\mathcal{L}}$ mais dont la métrique hermitienne à la place infinie $k \hookrightarrow \mathbf{C}$ est multipliée par $\exp(-\varepsilon f)$.*

Le fibré $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$ est alors intégrable et la hauteur de X relativement à ce fibré vérifie le développement limité

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)} = \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + \varepsilon \int_{X(\mathbf{C})} f \nu_{\overline{\mathcal{L}}} + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Démonstration. – L'existence de $\overline{\mathcal{M}}$ montre que le fibré trivial $\mathcal{O}_X(\varepsilon f)$ dont la métrique adélique est multipliée par $\exp(-\varepsilon f)$ est intégrable. Ainsi, par produit tensoriel, $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$ est intégrable. Comme le produit d'intersection des fibrés en droites munis de métriques adéliques intégrables est multilinéaire, on a l'égalité

$$\bigl(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f))^{\dim X+1} \mid X\bigr) = \sum_{k=0}^{\dim X+1} \varepsilon^k \binom{\dim X+1}{k} \bigl(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}_X}(f))^k \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{\dim X+1-k} \mid X\bigr).$$

Compte tenu de la définition de $\mathrm{h}(X)$, il suffit, pour établir la proposition, de prouver l'égalité

$$\bigl(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}_X}(f))\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{\dim X} \mid X\bigr) = \int_{X(\mathbf{C})} f \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{\dim X}.$$

Mais cette dernière égalité est vraie lorsque la métrique adélique est algébrique (c'est la formule $a(\eta)x = a(\eta\omega(x))$ de [28], III, 2.3.1) ; la hauteur est définie par passage à la limite en approchant la métrique adélique par des métriques algébriques, de même que la mesure dans la définition 1.7. □

2. Métriques adéliques canoniques sur les variétés abéliennes

Une partie des résultats de ce paragraphe est bien connue des spécialistes. Les précisions qu'on peut y trouver nous seront néanmoins utiles dans la suite de ce texte.

Soit A une variété abélienne sur un corps k. Si $\varepsilon \in A(k)$ est la section neutre, un *fibré en droites rigidifié* sur A est la donnée d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur A et d'un élément non nul de $\mathcal{L}|_\varepsilon$ (c'est-à-dire d'un isomorphisme $\varepsilon^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}$). Si l'on se donne deux fibrés inversibles rigidifiés isomorphes, il existe un unique isomorphisme, dit rigidifié, qui respecte les rigidifications.

Si $\mathcal{L}$ est un fibré inversible sur A, on note $\operatorname{Cube}(\mathcal{L})$ le fibré inversible sur A^3 donné par

$$p_{123}^*\mathcal{L} \otimes p_{12}^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_{23}^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_{31}^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*\mathcal{L},$$

où p_I désigne le morphisme $A^3 \to A$ donné par la somme des composantes d'indices contenus dans I. Si $\mathcal{L}$ est rigidifié, $\operatorname{Cube}(\mathcal{L})$ est canoniquement rigidifié et le théorème du cube implique alors que, pour tout fibré en droites rigidifié, il existe un unique isomorphisme $\operatorname{Cube}(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_{A^3}$ compatible aux rigidifications ; cet isomorphisme sera appelé isomorphisme du cube.

De même, $\operatorname{Carré}(\mathcal{L})$ est le fibré inversible sur A^2 défini avec des notations analogues par

$$p_{12}^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}.$$

Lorsque $\mathcal{L}$ est rigidifié, $\operatorname{Carré}(\mathcal{L})$ l'est aussi et si $\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent à zéro, il existe un unique isomorphisme rigidifié $\operatorname{Carré}(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_{A^2}$, appelé isomorphisme du carré.

LEMME 2.1. – *Soit A une variété abélienne sur un corps k et $\mathcal{L}$ un fibré en droites rigidifié sur A muni d'un isomorphisme rigidifié*

$$\varphi : [n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^d$$

pour deux entiers n et $d \geqslant 2$.

On suppose que :

– soit k est un corps valué et $\mathcal{L}$ est muni d'une métrique v-adique,

– soit k est un corps de nombres et $\mathcal{L}$ est muni d'une métrique adélique ;

et on suppose que cette métrique est telle que l'isomorphisme φ est une isométrie.

L'isomorphisme du cube est alors une isométrie.

Si $\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent à zéro, on a la même assertion avec l'isomorphisme du carré.

Démonstration. – Qu'un morphisme de fibrés en droites métrisés soit une isométrie se vérifie place par place. Il suffit donc de traiter le cas où k est un corps valué.

Soit $\mathsf{s} \in \Gamma(A^3, \operatorname{Cube}(\mathcal{L}))$ l'image de la section 1 par l'isomorphisme du cube. Alors, $\sigma = [n]^*\mathsf{s}/\mathsf{s}^d$ est une section globale rigidifiée du fibré inversible rigidifié $[n]^* \operatorname{Cube}(\mathcal{L}) \otimes \operatorname{Cube}(\mathcal{L})^{-d}$. Comme φ induit une isométrie de ce fibré inversible avec le fibré inversible trivial (muni de la métrique triviale $\|1\| = 1$), la norme de σ est constante, égale à 1. Soit $f(x) = \log \|\mathsf{s}\|(x)$. C'est une fonction continue bornée sur $A(\overline{k})$ telle que pour tout $x \in A(\overline{k})$,

$f(nx) = d\,f(x)$. Comme la multiplication par n est surjective sur $A(\overline{k})$, on en déduit que

$$\inf f = d \inf f, \qquad \sup f = d \sup f.$$

Comme $d \geqslant 2$, $\inf f = \sup f = 0$. Autrement dit, s est de norme constante égale à 1 et l'isomorphisme du cube est une isométrie.

L'argument pour l'isomorphisme du carré est identique. □

Pour tout fibré en droite rigidifié sur une variété abélienne qui est symétrique ou antisymétrique, il existe un unique isomorphisme $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^d$ avec $d = n^2$ ou $d = n$ suivant les cas. Le théorème 2.2(b) de [34] implique alors l'existence de métriques rendant ces isomorphismes des isométries. Le lemme précédent implique donc que tous les fibrés en droite rigidifiés sur une variété abélienne sur un corps valué (resp. sur un corps de nombres) disposent d'une métrique canonique qui rend les isomorphismes du cube ou du carré une isométrie.

Si $\mathcal{L}$ est ample et symétrique, il est bien connu que $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}$ est la hauteur de Néron–Tate sur $A(\overline{k})$ associée à $\mathcal{L}$, hauteur que l'on note aussi $\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{L}}$.

COROLLAIRE 2.2. – *Soit A une variété abélienne sur un corps k qui est soit un corps valué soit un corps de nombres. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{Q}$ deux fibrés en droites rigidifiés sur A, $\mathcal{L}$ étant ample et $\mathcal{Q}$ algébriquement équivalent à zéro. Soit $q \in A(k)$ tel que, notant $t_q : A \to A$ la translation par q dans A, on ait*

$$\varphi_{\mathcal{L}}(q) = t_q^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{Q}.$$

Alors, il existe une isométrie canonique compatible aux rigidifications

$$\overline{\mathcal{Q}} \simeq t_q^*\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{-1} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{-1}|_q.$$

Démonstration. – Notons $\mathcal{Q}'$ le fibré métrisé du membre de droite. Il est rigidifié grâce à la présence du troisième terme si bien qu'il suffit de prouver qu'il vérifie le théorème du carré avec métrique. Or,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Carré}(\overline{\mathcal{Q}'}) &= p_{12}^*\overline{\mathcal{Q}'} \otimes p_1^*\overline{\mathcal{Q}'}^{-1} \otimes p_2^*\overline{\mathcal{Q}'}^{-1} \\
&= p_{12}^*t_q^*\overline{\mathcal{L}} \otimes p_{12}^*\overline{\mathcal{L}}^{-1} \otimes p_1^*t_q^*\overline{\mathcal{L}}^{-1} \otimes p_2^*t_q^*\overline{\mathcal{L}}^{-1} \otimes p_1^*\overline{\mathcal{L}} \otimes p_2^*\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{L}}|_q \\
&= \mathrm{Cube}(\overline{\mathcal{L}})|_{A^2\times\{q\}} = \overline{\mathcal{O}_{A^2}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres k. Si $\mathcal{L}$ est un fibré inversible rigidifié, symétrique et ample sur A, la métrique adélique canonique sur $\mathcal{L}$ est elle-même ample en vertu du théorème 2.2 de [34]. Lorsque $\mathcal{L}$ est algébriquement équivalent à zéro, le corollaire précédent implique que la métrique adélique canonique est intégrable. Le fait qu'elle soit même semi-positive dépend d'une construction algébro-géométrique plus précise dont Michel Raynaud et Klaus Künnemann m'ont donné deux démonstrations différentes. Il faut en effet trouver un modèle semi-positif (d'une puissance) de $\mathcal{L}$ sur l'anneau des entiers d'une extension de k. Aux places de bonne réduction, cela ne pose aucun problème, de même aux places infinies où la forme de courbure de la métrique hermitienne canonique est nulle. Aux places de mauvaise réduction, il faut montrer qu'une puissance de $\mathcal{L}$ possède un modèle numériquement équivalent à zéro.

LEMME 2.3 (Künnemann). – *Soit R un anneau de valuation discrète dont le corps des fractions k est de caractéristique 0. Soient A une variété abélienne sur k et $\mathcal{Q} \in \mathrm{Pic}^0 A$ un fibré inversible algébriquement équivalent à 0 sur A. Alors, il existe une extension finie k' de k, un schéma $\widetilde{A}$ propre et plat sur la clôture intégrale R' de R dans k', et un fibré en droites $\widetilde{\mathcal{Q}}$ sur $\widetilde{A}$ tels que* :

– *$\widetilde{A} \otimes_{R'} k' = A \otimes_k k'$ et $\widetilde{\mathcal{Q}} \otimes_{R'} k'$ est une puissance $\geqslant 1$ de $\mathcal{Q}$;*
– *pour toute courbe C contenue dans la fibre spéciale de $\widetilde{A}$, le degré de $\widetilde{\mathcal{Q}}$ sur C est égal à 0.*

Démonstration. – En fait, K. Künnemann démontre dans [17], lemme 8.1, que ceci est vrai pour toute variété projective lisse sur k qui admet un modèle régulier sur R, et tout cycle algébriquement équivalent à 0. Il démontre dans [18] (théorèmes 3.5, 4.2) que les variétés abéliennes admettent un modèle régulier quitte à effectuer une extension finie de k. □

Remarque 2.4. – Quelques remarques tout de même sur ce lemme. Remarquons pour commencer qu'il est vrai lorsque la variété abélienne a potentiellement bonne réduction : sur une extension k' telle que $A \otimes_k k'$ a bonne réduction, on choisit pour $\widetilde{A}$ le modèle de Néron de $A \otimes_k k'$; c'est un schéma abélien et tout fibré en droites algébriquement équivalent à 0 sur sa fibre générique se prolonge en un unique fibré en droites algébriquement équivalent à 0 (existence et propreté du schéma abélien dual).

Il est aussi vérifié si la variété abélienne est une courbe elliptique : on peut choisir pour $\widetilde{A}$ le modèle minimal régulier et l'étude de la matrice d'intersection de la fibre spéciale montre que tout diviseur de degré 0 s'étend en un unique diviseur (à coefficients rationnels) qui est de degré 0 sur chaque composante irréductible de la fibre spéciale.

Dans le cas général, Künnemann se ramène au cas des courbes en utilisant le fait qu'un fibré en droite algébriquement équivalent à 0 provient via une correspondance d'un fibré en droite de degré 0 sur une courbe projective lisse, quitte à faire une extension des scalaires. Pour les courbes, le même argument concernant la matrice d'intersection de la fibre spéciale fournit l'extension voulue. L'existence d'un modèle régulier où la théorie de l'intersection de Fulton puisse s'appliquer permet d'étendre cette correspondance et donc d'obtenir l'extension recherchée.

Appliquée à une courbe elliptique, la formule de Faltings–Hriljac exprime l'auto-intersection d'un diviseur d'Arakelov de degré 0 en fonction de la hauteur de Néron–Tate du point correspondant. Sur une variété abélienne, elle admet la généralisation suivante.

THÉORÈME 2.5. – *Soient A une variété abélienne sur un corps de nombres k, $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{Q}}$ deux fibrés en droites rigidifiés sur A munis de leurs métriques adéliques canoniques. On suppose que $\mathcal{L}$ est ample symétrique et $\mathcal{Q}$ algébriquement équivalent à zéro. Soit $q \in A(\overline{k})$ un point tel que $\mathcal{Q} = \varphi_{\mathcal{L}}(q)$ $(= t_q^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1})$.*

Alors, pour tout $a \in \{0, \ldots, 1 + \dim A\}$, $a \neq 2$, on a

$$\left(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}})^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{1+\dim A - a} \mid A\right) = 0,$$

tandis que pour $a = 2$, on a

$$\left(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{\dim A - 1} \mid A\right) = -\frac{2}{\dim A}\, \mathrm{c}_1(\mathcal{L})^{\dim A} \widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{L}}(q).$$

Démonstration. – Notons $g = \dim A$ et soit f la fonction polynomiale définie par

$$f(x) = \left(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}) + x\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}})\right)^{g+1} = \sum_{a=0}^{g+1} \binom{g+1}{a} x^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}})^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{1+\dim A - a}. \tag{2.1}$$

On commence par rappeler que

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{1+g} = 0\,;$$

en effet, lorsqu'on remplace $\mathcal{L}$ par $[2]^*\mathcal{L}$, ce nombre est multiplié par 4^{1+g} puisque $[2]^*\overline{\mathcal{L}} \simeq \overline{\mathcal{L}}^4$ et aussi par 4^g car le degré de la multiplication par 2 est 4^g. (Le même argument permet de prouver la nullité des expressions du théorème pour $a \neq 2$.)

Comme $\mathcal{Q} = \varphi_{\mathcal{L}}(q)$, le corollaire 2.2 implique que pour $x \in \mathbf{Z}$,

$$x\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}}) = \widehat{\mathrm{c}}_1(t_{xq}^*\overline{\mathcal{L}}) - \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}) - \pi^*\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{xq}),$$

où $\pi : A \to \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural canonique. Ainsi, si x est entier,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\widehat{\mathrm{c}}_1(t_{xq}^*\overline{\mathcal{L}}) - \pi^*\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{xq})\right)^{g+1} \\ &= \sum_{a=0}^{g+1} \binom{g+1}{a} (-1)^a \pi_*\left(\widehat{\mathrm{c}}_1(t_{xq}^*\overline{\mathcal{L}})^{g+1-a}\right)\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{xq})^a \end{aligned}$$

d'après la formule de projection. Or, $\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{g+1-a}$ s'interprète comme un élément de $\widehat{\mathrm{CH}}^{g+1-a}(A)$ si bien que $\pi_*\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{g+1-a}$ est nul si $a \neq 0$ et si $a \neq 1$. Pour $a = 0$, on a

$$\widehat{\deg}\left(\widehat{\mathrm{c}}_1(t_{xq}^*\overline{\mathcal{L}})^{g+1}\right) = \left(\widehat{\mathrm{c}}_1(t_{xq}^*\overline{\mathcal{L}})^{g+1} \mid A\right) = \left(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{g+1} \mid t_{xq\,*}A\right) = \left(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{g+1} \mid A\right) = 0.$$

Pour $a = 1$, $\pi_*\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^g$ appartient à $\widehat{\mathrm{CH}}^0(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_k)$ et s'identifie à $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})^g$. Par suite,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\binom{g+1}{1}\mathrm{c}_1(\mathcal{L})^g\widehat{\deg}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{xq}) \\ &= -(g+1)\mathrm{c}_1(\mathcal{L})^g\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}}}(xq) \\ &= -(g+1)\mathrm{c}_1(\mathcal{L})^g\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}}}(q) \cdot x^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En comparant les formules (2.1) et (2.2), on obtient le théorème. □

3. Hauteurs normalisées sur les variétés semi-abéliennes

3.1. Compactifications équivariantes

On considère un schéma semi-abélien

$$1 \to T \to G \to A \to 0$$

sur un schéma S (disons, noethérien, séparé ; rapidement, S sera le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres). Fixons une compactification équivariante $T \hookrightarrow X$ du tore (ainsi, X est une S-variété torique). On supposera toujours que X est *projective lisse* sur S. Alors, l'image directe de G par le morphisme $T \to X$ définit un S-schéma $\overline{G}$, ainsi qu'un morphisme $\pi : \overline{G} \to A$ propre (c'est une fibration dont les fibres sont, localement sur A pour la topologie de Zariski, isomorphes à X) ; *cf.* par exemple [6], 10.2, Lemma 6.

De manière plus élémentaire, dans le cas où le tore T est déployé sur S, un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t$ nous fournit t fibrés en droites sur A, algébriquement équivalents à 0, notés $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t$. Alors, si $T \hookrightarrow X$ est donné par un éventail (régulier) $\mathfrak{S}$ de $\mathbf{R}^t$, on peut décrire $\overline{G}$ en recollant des sous-schémas de fibrés vectoriels sur A de la forme

$$\mathbf{V}\left(\bigoplus_{i=1}^t \left(\bigoplus_{j=1}^t \mathcal{L}_j^{\otimes n_{ij}}\right)\right).$$

Remarque 3.2. – Dans ma thèse [8], j'ai traité le cas où $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique 0, P. Vojta fait cette construction dans son article [32]. Auparavant, J.-P. Serre [27] avait considéré la compactification $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^t$. Voir aussi Knop–Lange [16], toujours lorsque S est le spectre d'un corps. Dans un travail récent avec Yuri Tschinkel [9], nous introduisons la notion de torseur arithmétique qui éclaire particulièrement ces constructions de hauteurs dans des situations fibrées.

L'action de T sur X se prolonge en une action $m : G \times \overline{G} \to \overline{G}$. On dispose aussi de S-morphismes $\overline{G} \to \overline{G}$, notés $[n]_{\overline{G}}$ qui prolongent la multiplication par $n : G \to G$.

3.3. Fibrés en droites G-linéarisés

Comme X est lisse, tout diviseur de X invariant par l'action de T définit un unique faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\overline{G}$, G-linéarisé au sens que si p_1, p_2 (resp. m) désignent les deux projections (resp. la loi d'addition) $G \times_S \overline{G} \to \overline{G}$, on a un isomorphisme $(p_1, m)^*\mathcal{L} \simeq (p_1, p_2)^*\mathcal{L}$ astreint à une relation de compatibilité sur $G \times_S \overline{G} \times_S \overline{G}$. (Autrement dit, on dispose d'isomorphismes compatibles, pour $x \in \overline{G}$ et $g \in G$, $\mathcal{L}_{g\cdot x} \simeq \mathcal{L}_g \otimes \mathcal{L}_x$.) En particulier, la restriction de $\mathcal{L}$ à la section unité de G est munie d'une trivialisation canonique. De même, on dispose d'un isomorphisme canonique $[n]_{\overline{G}}^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$.

Désormais, on se place sur le spectre d'un corps de nombres k.

PROPOSITION 3.4. – *Tout faisceau inversible G-linéarisé $\mathcal{L}$ sur la compactification $\overline{G}$ possède une unique métrique adélique telle que, pour tout entier $n > 1$, l'isomorphisme canonique $[n]_{\overline{G}}^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$ soit une isométrie.*

Démonstration. – Fixons un entier $n > 1$. S. Zhang a montré ([34], Theorem 2.2) que $\mathcal{L}$ possède, pour toute place v de k, une unique métrique v-adique continue et bornée $\|\cdot\|_v$ telle que l'isomorphisme canonique $[n]_{\overline{G}}^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$ soit une isométrie en v.

Il faut montrer que la collection des métriques $\|\cdot\| = (\|\cdot\|_v)_v$ est une métrique adélique. Il suffit de vérifier que la collection de métriques obtenue provient pour presque toute place v d'un modèle entier sur un ouvert U du spectre de l'anneau $\mathfrak{o}_k$ des entiers de k. Pour cela, il suffit de démontrer les quatre points suivants :

– la compactification équivariante $\overline{G}$ se prolonge en un schéma propre et plat $\overline{G_U}$ sur U ;
– le morphisme $[n]_{\overline{G}}$ se prolonge en un morphisme $\varphi : \overline{G_U} \to \overline{G_U}$;
– le faisceau inversible $\mathcal{L}$ se prolonge en un faisceau inversible $\mathcal{L}_U$ sur $\overline{G_U}$;
– l'isomorphisme $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$ se prolonge en un isomorphisme $\varphi^*\mathcal{L}_U \simeq \mathcal{L}_U^{\otimes n}$.

En effet, ce modèle entier définit pour toute place v de k qui domine U une métrique v-adique canonique ; les propriétés ci-dessus impliquent que cette métrique v-adique rend l'isomorphisme $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$ une isométrie, ainsi qu'il fallait prouver.

Il existe alors un ouvert U de $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_k$ tel que :

– la k-variété abélienne A se prolonge en un schéma abélien A_U sur U ;
– le k-tore T se prolonge en un tore T_U sur U ;
– la variété torique (lisse) $T \hookrightarrow X$ se prolonge en une U-variété torique lisse $T_U \hookrightarrow X_U$.

Alors, l'extension $G \in \operatorname{Ext}^1_{\operatorname{Spec} k}(A, T)$ se prolonge en une unique extension G_U de A_U par T_U. Le résultat est bien connu si $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ (existence du schéma abélien dual) ; il s'en déduit immédiatement pour un tore déployé puis par descente au cas d'un tore quelconque. Puis, la compactification équivariante $\overline{G}$ se prolonge en une compactification équivariante $\overline{G_U}$ du U-schéma semi-abélien G_U.

On peut de plus supposer que $\mathcal{L}$ provient d'un diviseur effectif T-invariant sur X ; alors, ce diviseur s'étend en un unique diviseur T_U-invariant sur X_U, puis en un unique diviseur G_U-invariant sur $\overline{G_U}$. Ainsi, $\mathcal{L}$ se prolonge en un unique faisceau inversible G_U-linéarisé $\mathcal{L}_U$ sur

$\overline{G_U}$. On dispose ainsi d'un unique isomorphisme $[n]^*_{\overline{G_U}}\mathcal{L}_U \simeq \mathcal{L}_U^{\otimes n}$ qui prolonge l'isomorphisme analogue sur $\operatorname{Spec} k$.

Montrons maintenant que ces métriques adéliques ne dépendent pas du choix de l'entier n. Si $n \geqslant 2$, notons φ_n l'isomorphisme canonique $[n]^*_{\overline{G}}\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$. Si m et n sont deux entiers $\geqslant 2$, l'isomorphisme

$$\varphi_m^{\otimes n}([m]^*_{\overline{G}}\varphi_n) : [mn]^*_{\overline{G}}\mathcal{L} \simeq [m]^*\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{L}^{\otimes mn}$$

est égal à φ_{mn}. Munissons $\mathcal{L}$ de la métrique adélique définie par l'entier mn. Fixons une place v de k. Les logarithmes des normes v-adiques des isomorphismes φ_n, φ_m et φ_{mn} sont trois fonctions continues bornées f_n, f_m et f_{mn} de $\overline{G}(\overline{k}_v)$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout $x \in \overline{G}(\overline{k}_v)$,

$$nf_m(x) + f_n([m]x) = f_{mn}(x).$$

Par définition de la métrique adélique définie par l'entier mn, $f_{mn} = 0$. Il en résulte que pour tout $x \in \overline{G}(\overline{k}_v)$,

$$f_m(x) = -\frac{1}{n} f_n([m]x) = \frac{1}{mn} f_m([mn]x)$$

par symétrie. Comme f_m est bornée et $mn \geqslant 2$, on en déduit $f_m = 0$ puis $f_n = 0$. Autrement dit, les isomorphismes φ_n et φ_m sont des isométries dès que $\mathcal{L}$ est muni de la métrique qui rend φ_{mn} une isométrie. Comme il existe une unique métrique qui rend φ_n une isométrie, les métriques v-adiques sur $\mathcal{L}$, puis les métriques adéliques, ne dépendent pas du choix de l'entier n. □

Remarque 3.5. – Dans le cas où $A = 0$ et $X = \mathbf{P}^t$, cette métrique est une des métriques usuelles sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$: si $P \in k(x_0, \dots, x_n)$ est homogène de degré 1,

$$\|P\|(x_0 : \dots : x_t) = \frac{|P(x_0, \dots, x_t)|}{\max(|x_0|, \dots, |x_t|)}.$$

Plus généralement, toujours quand $A = 0$, elle a été considérée de manière approfondie par Maillot [21] dans son étude de la géométrie d'Arakelov des variétés toriques. Quand A est quelconque et $t = 1$, donc $X = \mathbf{P}^1$, je l'ai utilisée dans [8].

PROPOSITION 3.6. – *Si $\mathcal{L}$ provient d'un diviseur invariant ample sur X, cette métrique adélique est de plus semi-positive. En particulier, les métriques adéliques fournies par la proposition* 3.4 *sont intégrables.*

Démonstration. – Quitte à faire une première extension des scalaires, on peut supposer que le tore sous-jacent à G est déployé. Soient alors $\mathcal{Q}_i$ des fibrés en droites algébriquement équivalents à 0 sur A qui définissent la variété semi-abélienne G. D'après le lemme 2.3, il existe une extension finie k' de k, des modèles $\widetilde{A}_i$ de A sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_{k'}$, un entier $N \geqslant 1$ et des modèles $\widetilde{\mathcal{Q}}_i$ des $\mathcal{Q}_i^{\otimes N}$ sur $\widetilde{A}_i$ qui sont de degré 0 sur toute courbe contenue dans une fibre verticale. Quitte à considérer le produit fibré des $\widetilde{A}_i$ au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_{k'}$, nous pouvons supposer que tous les $\widetilde{A}_i$ sont égaux à $\widetilde{A}$.

Soit G' la variété semi-abélienne image de G par l'image directe via le morphisme $T \xrightarrow{[N]} T$. Par le A-morphisme naturel $\overline{G} \to \overline{G'}$ d'élévation à la puissance N dans les fibres, $\mathcal{L}^{\otimes N}$ s'identifie isométriquement à l'image réciproque d'un fibré $\mathcal{L}'$ sur $\overline{G'}$. Il suffit ainsi de montrer que la métrique adélique sur $\mathcal{L}'$ est semi-positive.

Soit $\widetilde{G}$ le $\mathfrak{o}_{k'}$-modèle de $\overline{G'}$ obtenu en recollant des sous-schémas de fibrés vectoriels sur $\widetilde{A}$ de la forme $\mathbf{V}(\bigoplus_i(\bigotimes_j \widetilde{Q}_j^{n_{i,j}}))$. Soit $\widetilde{\mathcal{L}}$ le modèle entier de $\mathcal{L}'$ induit par le même diviseur T-invariant D_X sur X que celui qui définit $\mathcal{L}$. D'après la théorie des variétés toriques, il existe alors des diviseurs D_s T-invariants sur X linéairement équivalents à un multiple $n_s D_X$ tels que $\bigcap_s D_s = \emptyset$. Sur $\widetilde{G}$, on dispose de diviseurs $[D_s]$ induits par les D_s dont l'intersection est vide. (En effet, les cycles T-invariants sur une variété torique ont une description purement combinatoire en termes de l'éventail. Dans la famille $\widetilde{G} \to \widetilde{A}$, toutes les fibres sont décrites par le même éventail et possèdent donc la même combinatoire.) De plus, il existe pour tout s un fibré en droites $\mathcal{Q}_s$ sur $\mathcal{A}$ de la forme $\bigotimes_j \widetilde{Q}_j^{m_j}$ tel que $\mathcal{L}' = \mathcal{O}([D_s]) \otimes \pi^* \mathcal{Q}_s$.

Soit C une courbe contenue dans une fibre verticale de $\widetilde{G}$. Soit s tel que $C \not\subset [D_s]$. Alors $\deg \mathcal{O}([D_s])|_C \geqslant 0$ et puisque les $\widetilde{Q}_j$ sont de degré 0 sur l'image $\pi(C)$ de C dans $\widetilde{A}$, on a

$$\deg \widetilde{\mathcal{L}}|_C \geqslant 0.$$

De plus, $\mathcal{L}'$ possède une métrique hermitienne dont la forme de courbure est positive ou nulle : il suffit de noter que du point de vue différentiel hermitien, la fibration $\overline{G} \to A$ est localement un produit, un fibré en droites algébriquement équivalent à 0 sur une variété abélienne étant plat. On recopie alors la preuve de [34, 2.3] en remplaçant le mot «ample» par «semi-positif». □

3.7. Construction des hauteurs normalisées

Considérons un fibré inversible G-linéarisé $\mathcal{L}$ sur $\overline{G}$, relativement ample sur A, muni de sa métrique adélique canonique. Alors, pour tout fibré inversible ample symétrique $\mathcal{M}$ sur A, $\mathcal{L} \otimes \pi^* \mathcal{M}$ est ample. (C'est une conséquence du fait que les fibres de $\overline{G} \to A$ sont toutes isomorphes, *voir* [31], Lemma 3.1.) En munissant $\mathcal{M}$ de la métrique adélique définissant la hauteur de Néron–Tate sur A comme dans le paragraphe 2, on obtient une métrique adélique semi-positive canonique sur $\mathcal{L} \otimes \pi^* \mathcal{M}$, et donc une fonction hauteur sur les sous-variétés de $\overline{G}$. Comme $\mathcal{L} \otimes \pi^* \mathcal{M}$ est ample, sa restriction aux points est un représentant d'une hauteur de Weil sur $\overline{G}(\overline{k})$.

DÉFINITION 3.8. – Cette fonction, attachée à $(T \hookrightarrow X, \mathcal{L}, \mathcal{M})$, sera appelée *hauteur normalisée*. On la note $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}$ et $\widehat{\mathrm{h}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

Lorsque la variété torique $T \hookrightarrow X$ choisie pour compactifier G est une variété de Fano, on peut choisir pour $\mathcal{L}$ le fibré inversible associé au complémentaire de T dans X qui est un diviseur T-invariant relativement ample (diviseur anticanonique relatif). Dans ce cas, la hauteur normalisée ne dépend plus que d'une compactification équivariante du tore et d'un faisceau inversible ample symétrique sur la variété abélienne. Les deux exemples classiquement utilisés ($\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^g \subset (\mathbf{P}^1)^g$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^g \subset \mathbf{P}^g$) sont d'ailleurs dans ce cas.

Il résulte de la définition des métriques adéliques canoniques que la hauteur normalisée d'un point $x \in \overline{G}(\overline{k})$ relativement à $\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}$ vérifie pour tout point $x \in G(\overline{k})$ et tout entier $n \geqslant 1$ la relation

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}([n]_G x) = \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}([n]_G x) + \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(\pi([n]_G x)) = n \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + n^2 \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(\pi(x)).$$

On a alors le lemme suivant :

LEMME 3.9. – *Pour tout $x \in G(\overline{k})$, on a $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in G(\overline{k})$, $\widehat{\mathrm{h}}(x) \geqslant 0$; on a de plus égalité si et seulement si x est de torsion.*

On notera que ce lemme implique que pour toute sous-variété X de $\overline{G}$ rencontrant G, on a l'égalité $e_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(X) \geqslant 0$.

Démonstration. – Comme $\mathcal{L}$ est représenté par un diviseur contenu dans $\overline{G} \setminus G$, toute hauteur de Weil attachée à $\mathcal{L}$ est minorée sur $G(\overline{k})$. La propriété de normalisation implique alors que pour tout $x \in G(\overline{k})$, $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \geqslant 0$.

Comme $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}$ est la hauteur de Néron–Tate sur A, elle est positive, ce qui implique $\widehat{\mathrm{h}}(x) \geqslant 0$. Si de plus $x \in G(\overline{k})$ est de hauteur normalisée nulle, on voit que $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(\pi(x)) = \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = 0$. Par suite, tous les itérés x, $[2]x$, etc. sont de hauteur nulle. Comme $\mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{M}$ est ample et que $\widehat{h}$ est un représentant de la hauteur de Weil pour ce fibré, le théorème de Northcott implique qu'ils forment un ensemble fini. Cela implique que x est de torsion. La réciproque est claire. □

Remarque 3.10. – Lorsque $t = 1$ et $X = \mathbf{P}^1$, D. Bertrand donne dans [2] une décomposition de la hauteur relative d'un point comme une somme de hauteurs locales, toutes positives ou nulles. En général, si $\mathcal{L}$ est représenté par un diviseur G-invariant effectif dont le support ne rencontre pas G, on peut vérifier que sa section canonique est de norme inférieure ou égale à 1 en toute place.

La proposition suivante résume les propriétés des hauteurs normalisées vis-à-vis des morphismes de multiplication par un entier positif.

PROPOSITION 3.11. – *Soient V une sous-variété de $\overline{G}$ et n un entier $\geqslant 2$.*

(1) *Si $[n]_*V$ désigne le* cycle *image directe de V par le morphisme de multiplication par n, on a pour tous entiers a et b positifs tels que $a + b = \dim V + 1$ l'égalité*

$$\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^*\overline{\mathcal{M}})^b \mid [n]_*V\big) = n^{a+2b}\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^*\overline{\mathcal{M}})^b \mid V\big).$$

(2) *Si ξ est un point de torsion de G et V une sous-variété de $\overline{G}$, alors V et $\xi + V$ ont même hauteur normalisée.*

Démonstration. – (1) C'est la formule de projection, *cf.* [7, 2.3.1, (iv)] dans le cas de métriques adéliques algébriques ; le cas général s'en déduit par approximation.

(2) Soit n un entier $\geqslant 2$ tel que $[n]_G\xi = 0$. Comme $[n]_*V = [n]_*(\xi + V)$, la formule précédente implique l'égalité des degrés arithmétiques. Comme V et $\xi + V$ ont même degré géométrique, l'égalité des hauteurs en résulte. □

4. Un exemple

Dans ce paragraphe, on calcule explicitement quelques-uns des invariants introduits plus haut pour une variété semi-abélienne compactifiée à l'aide du plongement $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t \subset \mathbf{P}^t$.

On se fixe ainsi un corps de nombres k, une variété abélienne A de dimension g définie sur k, un fibré inversible ample et symétrique $\mathcal{M}$ sur A et t éléments $q_1, \ldots, q_t$ de $A(k)$. Pour $i \in \{1, \ldots, t\}$, on pose $\mathcal{Q}_i = \varphi_{\mathcal{M}}(q_i) = t_{q_i}^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{-1}$. Tous ces fibrés en droites sont munis de leur métrique adélique canonique.

Soit G la variété semi-abélienne

$$G := \prod_{i=1}^{t} \big(\mathbf{V}(\mathcal{Q}_i^\vee) \setminus \{0\}\big).$$

(Le produit est relativement à A. Un point de G est la donnée d'un point $a \in A$ et pour tout i, d'un élement non nul de $\mathcal{Q}_i|_a$.)

En explicitant la construction de $\overline{G}$ faite au § 3, on peut identifier $\overline{G}$ au fibré projectif

$$\overline{G} = \mathbf{P}\big(\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{Q}_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathcal{Q}_t^\vee\big)$$

dont un point est la donnée d'un point $a \in A$ et d'éléments non tous nuls de $\mathcal{O}_A|_a, \mathcal{Q}_1|_a, \ldots, \mathcal{Q}_t|_a$. Notons $\pi : \overline{G} \to A$ la projection canonique.

Les $t+1$ diviseurs $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t$-invariants de $\mathbf{P}^t$ définis par la nullité des coordonnées fournissent des diviseurs $D_0, \ldots, D_t$ sur $\overline{G}$. Les fibrés inversibles correspondants seront notés $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_t$. De plus, on a pour tout i, l'égalité $D_i - D_0 \sim \mathrm{c}_1(\pi^*\mathcal{Q}_i)$ dans $\mathrm{CH}^1(\overline{G})$ (*cf.* [13, Chap. V, Prop. 2.6]). Si les $\mathcal{L}_i$ sont munis de leur métrique adélique canonique, il est aisé de vérifier que l'égalité précédente est vraie avec métriques : pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$,

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_i}) = \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_0}) + \pi^*\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}_i}).$$

On notera $\widehat{D_i} = \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_i})$. Posons aussi

$$\overline{\mathcal{Q}} = \bigotimes_{i=1}^t \overline{\mathcal{Q}_i}, \quad q = \sum_{i=1}^t q_i \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{L}} = \bigotimes_i \overline{\mathcal{L}_i} = \overline{\mathcal{L}_0}^{t+1} \otimes \pi^*\overline{\mathcal{Q}}.$$

PROPOSITION 4.1. – *Pour toute famille de fibrés en droites $\overline{\mathcal{F}_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant g)$ munis de métriques adéliques intégrables sur $\overline{G}$, on a*

$$\widehat{D_0} \cdot \widehat{D_1} \cdots \widehat{D_t} \cdot \prod_{i=1}^t \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{F}_i}) = 0.$$

Démonstration. – Choisissons des modèles $\widetilde{A}$, $\widetilde{\mathcal{Q}_i}$, et $\widetilde{G} = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\widetilde{A}} \oplus \widetilde{\mathcal{Q}_1}^\vee \oplus \cdots)$ sur l'anneau $\mathfrak{o}$ des entiers de k. Aux places archimédiennes, munissons les $\mathcal{Q}_i$ de leur métrique plate canonique.

Le cycle arithmétique $\widetilde{D}_i$ défini par l'annulation de la i^{e} coordonnée prolonge D_i et on peut le munir d'un courant de Green canonique en munissant $\mathcal{O}_A \oplus \mathcal{Q}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Q}_t$ de la métrique hermitienne somme directe orthogonale.

Comme les diviseurs $\widetilde{D}_i$ s'intersectent proprement, $\widetilde{D}_0 \cdots \widetilde{D}_t$ est représenté par un couple $(Z, g_Z) \in \widehat{\mathrm{Z}}^{t+1}(\widetilde{G})$, où $Z \in \mathrm{Z}^{t+1}(\widetilde{G})$ est un cycle supporté par l'intersection des $\widetilde{D}_i$ et g_Z un courant de Green pour Z. Or, l'intersection des $\widetilde{D}_i$ est vide, si bien que $Z = 0$. L'équation $\mathrm{dd}^c g_Z + \delta_Z = \omega_Z$, le fait que ω_Z soit $\mathcal{C}^\infty$ et l'ellipticité de dd^c impliquent alors qu'il existe un courant lisse α_Z sur $\overline{G}(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire une forme différentielle de type (t,t) de classe $\mathcal{C}^\infty$) et deux courants u et v de types $(t-1, t)$ et $(t, t-1)$ respectivement de sorte que $g_Z = \alpha_Z + \partial u + \overline{\partial} v$. Autrement dit, l'élément $(0, \alpha_Z) \in \widehat{\mathrm{Z}}^{t+1}(\widetilde{G})$ représente le produit $\widetilde{D}_0 \cdots \widetilde{D}_t$.

Soient $\overline{\mathcal{F}_1}, \ldots, \overline{\mathcal{F}_g}$ des fibrés en droites munis de métriques adéliques sur $\overline{G}$. On veut prouver que le produit

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_0}) \cdots \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_t}) \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{F}_1}) \cdots \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{F}_g}) = 0.$$

Par approximation, on peut supposer que les métriques adéliques sur les $\mathcal{F}_j$ sont algébriques données par des éléments $\widehat{\mathrm{c}}_1(\widetilde{\mathcal{F}_j}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{G})$. Soit $(Z', g_{Z'})$ un représentant de leur produit.

Si l'on se donne des modèles $\widetilde{G}_n$ de $\overline{G}$ munis de deux morphismes $\varphi_n : \widetilde{G}_n \to \widetilde{G}$ et $\psi_n : \widetilde{G}_n \to \widetilde{G}$ qui étendent respectivement l'identité et la multiplication par n, le nombre à calculer est la limite des expressions

$$\begin{aligned} P_n &:= \frac{1}{n^{t+1}} \widehat{\deg}\, \psi_n^*(Z, g_Z) \cdot \varphi_n^*(Z', g_{Z'}) = \frac{1}{n^{t+1}} \widehat{\deg}\, \psi_n^*(0, \alpha_Z) \cdot \varphi_n^*(Z', g_{Z'}) \\ &= \frac{1}{n^{t+1}} \widehat{\deg}\,(0, \alpha_Z \circ [n] \wedge \omega_{Z'}) = \frac{1}{n^{t+1}} \int\limits_{\overline{G}(\mathbf{C})} (\alpha_Z \circ [n]) \omega_{Z'} \end{aligned}$$

d'après la formule 2.3.1, p. 63 de [28].

Le fait d'avoir choisi une métrique plate sur les $\mathcal{Q}_i$ a la conséquence suivante. Soit $U \subset A(\mathbf{C})$ un ouvert sur lequel les $\mathcal{Q}_i$ possèdent une section de norme 1. Du point de vue différentiel hermitien, on peut alors identifier $\pi^{-1}(U) \subset \overline{G}(\mathbf{C})$ au produit $\mathbf{P}^t(\mathbf{C}) \times U(\mathbf{C})$. Sur $\mathbf{P}^t$, le produit d'intersection arithmétique analogue $\widehat{D}_0 \cdots \widehat{D}_t$ est représenté par un couple $(0, \alpha)$, où α est une forme différentielle de type (t, t) sur $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$. La forme α_Z s'identifie à la forme différentielle «constante» induite par α, et $\alpha_Z \circ [n]$ sur $\overline{G}(\mathbf{C})$ s'identifie de même à $[n]^*\alpha$. La nullité de la hauteur des variétés toriques pour les métriques adéliques canoniques ([21], proposition 7.1.1) signifie exactement que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{t+1}} \int\limits_{\mathbf{P}^t(\mathbf{C})} [n]^* \alpha = 0.$$

Par suite, P_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'il fallait démontrer. □

THÉORÈME 4.2. – *Relative au fibré inversible métrisé $\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}$, on a*

$$\widehat{\mathrm{h}}(\overline{G}) = -\frac{1}{(t+1)(t+2)} \left(\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(q) + \sum_{i=1}^{t} \widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(q - (t+1) q_i) \right).$$

Démonstration. – On veut calculer $\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g+t+1}$. L'égalité de cycles $[2]_* \overline{G} = 2^{2g+t} \overline{G}$ et la proposition 3.11 impliquent que si $a \neq t+2$,

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g+t+1-a} = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g+t+1} &= \binom{g+t+1}{t+2} \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}})^{t+2} \widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g-1} \\ &= \binom{g+t+1}{t+2} \big((t+1) \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_0}) + \widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^* \overline{\mathcal{Q}}) \big)^{t+2} \widehat{\mathrm{c}}_1(\pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g-1} \\ &= \binom{g+t+1}{t+2} \sum_{a=0}^{t+2} \binom{t+2}{a} (t+1)^a \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^a \widehat{\mathrm{c}}_1\big(\pi^*(\overline{\mathcal{Q}})\big)^{t+2-a} \widehat{\mathrm{c}}_1\big(\pi^*(\overline{\mathcal{M}})\big)^{g-1} \\ &= \binom{g+t+1}{t+2} \sum_{a=0}^{t+2} \binom{t+2}{a} (t+1)^a \pi_* \big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^a \big) \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{Q}})^{t+2-a} \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{M}})^{g-1} \end{aligned}$$

d'après la formule de projection. On voit que dans cette somme, si $(t+2-a) + (g-1) > g+1$, c'est-à-dire si $a < t$, le terme correspondant est nul. Il nous faut ainsi calculer $\pi_* \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^a$ pour $a = t$, $a = t+1$ et $a = t+2$. Ce sont des éléments de $\widehat{\mathrm{CH}}^0(A)$, $\widehat{\mathrm{CH}}^1(A)$ et $\widehat{\mathrm{CH}}^2(A)$ respectivement.

Le premier est en fait égal à $\pi_* c_1(\mathcal{L}_0)^t = 1$ (par exemple parce que le produit est représenté numériquement par le cycle $D_1 \cdots D_t$).

Utilisons maintenant la proposition précédente que l'on peut développer en

$$0 = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^{t+1} + \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^t \pi^* \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}}) + \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^{t-1} \pi^* \left(\sum_{i<j} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_i}) \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_j}) \right) + \cdots .$$

Appliquant π_* et utilisant la formule de projection, on obtient ainsi

$$\pi_* \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^{t+1} = -\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}}),$$

tandis que si on multiplie par $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}_0})$ avant d'appliquer π_*, on trouve

$$\pi_* \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}_0})^{t+2} = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 - \sum_{i<j} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_i}) \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_j}) = \frac{1}{2} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_i})^2.$$

(À proprement parler, on n'écrit ces égalités qu'après avoir multiplié les deux membres par $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^a \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^b$ pour $a + b = g$ ou $g - 1$.) Il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g+t+1} \\
&\quad = \binom{g+t+1}{t+2} \left(\frac{(t+2)(t+1)}{2} (t+1)^t \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 - (t+2)(t+1)^{t+1} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 \right. \\
&\quad\quad \left. + (t+1)^{t+2} \frac{1}{2} \left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 + \sum_i \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_i})^2 \right) \right) \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{g-1} \\
&\quad = \frac{1}{2} \binom{g+t+1}{t+2} (t+1)^{t+1} \left(-\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}})^2 + (t+1) \sum_{i=1}^t \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{Q}_i})^2 \right) \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{g-1} \\
&\quad = -\frac{1}{g} \binom{g+t+1}{t+2} (t+1)^{t+1} c_1(\mathcal{M})^g \left((t+1) \sum_{i=1}^t \widehat{h}_{\mathcal{M}}(q_i) - \widehat{h}_{\mathcal{M}} \left(\sum_{i=1}^t q_i \right) \right)
\end{aligned}$$

d'après le théorème 2.5. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}})^{g+t+1} \\
&\quad = -\frac{(g+t+1)!}{g!(t+2)!} (t+1)^{t+1} c_1(\mathcal{M})^g \left((t+1) \sum_{i=1}^t \widehat{h}_{\mathcal{M}}(q_i) - \widehat{h}_{\mathcal{M}} \left(\sum_{i=1}^t q_i \right) \right).
\end{aligned}$$

Le calcul de l'intersection géométrique est plus facile. Comme les $\mathcal{Q}_i$ sont algébriquement équivalents à zéro, tout se passe du point de vue numérique comme si l'on avait un produit et

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \pi^* \mathcal{M})^{g+t} = \binom{g+t}{t} (t+1)^t c_1(\mathcal{M})^g.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}}\otimes\pi^*\overline{\mathcal{M}}}(\overline{G}) &= \frac{1}{g+t+1}\frac{\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{L}}\otimes\pi^*\overline{\mathcal{M}})^{g+t+1}}{\mathrm{c}_1(\mathcal{L}\otimes\pi^*\mathcal{M})^{g+t}} \\
&= -\frac{1}{g+t+1}\frac{(g+t+1)!}{g!(t+2)!}\frac{g!t!}{(g+t)!}\frac{(t+1)^{t+1}\mathrm{c}_1(\mathcal{M})^g}{(t+1)^t\mathrm{c}_1(\mathcal{M})^g} \\
&\quad\times\left((t+1)\sum_{i=1}^t\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(q_i)-\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}\left(\sum_{i=1}^t q_i\right)\right) \\
&= -\frac{1}{t+2}\left((t+1)\sum_{i=1}^t\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(q_i)-\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}\left(\sum_{i=1}^t q_i\right)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la quadraticité de la hauteur de Néron–Tate, on a enfin

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{h}}(q)+\sum_{i=1}^t\widehat{\mathrm{h}}(q-(t+1)q_i) &= (t+1)\widehat{\mathrm{h}}(q)-2(t+1)\widehat{\mathrm{h}}(q)+(t+1)^2\sum_{i=1}^t\widehat{\mathrm{h}}(q_i) \\
&= (t+1)\left((t+1)\sum_{i=1}^t\widehat{\mathrm{h}}(q_i)-\widehat{\mathrm{h}}(q)\right)
\end{aligned}$$

si bien que le théorème est démontré. □

Le corollaire que voici acquerra tout son sel au paragraphe suivant.

COROLLAIRE 4.3. – *On a* $\widehat{\mathrm{h}}(\overline{G})\leqslant 0$, *avec égalité si et seulement si la variété semi-abélienne* G *est isotriviale.*

Démonstration. – Comme la hauteur de Néron–Tate est définie positive sur $A(k)\otimes\mathbf{R}$, la formule du théorème précédent montre que $\widehat{\mathrm{h}}(\overline{G})\leqslant 0$. De plus, on a égalité si et seulement si $\widehat{\mathrm{h}}(q)=0$ et $\widehat{\mathrm{h}}(q-(t+1)q_i)=0$ pour tout i, c'est-à-dire, $0=q=(t+1)q_i$ dans $A(k)\otimes\mathbf{R}$. Par suite, tous les q_i sont de torsion dans $A(k)$, les fibrés en droites $\mathcal{Q}_i$ d'ordre fini et G est isotriviale. □

Remarque 4.4. – On peut effectuer le calcul de la hauteur normalisée pour le fibré inversible

$$\mathcal{L}'=\bigotimes_{0\leqslant i\leqslant t}\mathcal{L}_i^{n_i}\otimes\pi^*\mathcal{M}$$

et, posant

$$r=(n_1q_1+\cdots+n_tq_t)-(n_0+\cdots+n_t)\frac{q_1+\cdots+q_t}{t+1}$$

dans $A(k)\otimes\mathbf{R}$, on obtient la formule

$$\widehat{h}'(\overline{G})=\left(\frac{n_0+\cdots+n_t}{t+1}\right)^2\widehat{\mathrm{h}}(\overline{G})-\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(r).$$

Ainsi, parmi les fibrés en droites G-linéarisés métrisés $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\overline{G}$ tels que $\mathcal{L}\otimes\pi^*\mathcal{M}$ est de degré donné, c'est le fibré anticanonique relatif qui donne à $\overline{G}$ la plus grande hauteur.

LEMME 4.5. – *On a*

$$\mu_{\overline{\mathcal{L}}}(\overline{G})=-\max\Big(\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(q),\max_i\big(\widehat{\mathrm{h}}_{\mathcal{M}}(q-(t+1)q_i)\big)\Big).$$

Démonstration. – L'intersection des D_i pour $0 \leqslant i \leqslant t$ est vide. Par suite, il suffit de prouver les égalités

$$\min_{x \notin D_0} \widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(x) = -\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{M}}}(q), \qquad \min_{x \notin D_i} \widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(x) = -\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{M}}}\bigl(q - (t+1)q_i\bigr).$$

Compte tenu de l'isométrie $\mathcal{L}_i \simeq \mathcal{L}_0 \otimes \pi^* \mathcal{Q}_i$, on a pour $x \in \overline{G}(\overline{\mathbf{Q}})$,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(x) &= (t+1)\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}_0}}(x) + \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{Q}}}\bigl(\pi(x)\bigr) + \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}\bigl(\pi(x)\bigr) \\ &= (t+1)\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}_0}}(x) + \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(\pi(x) + q) - \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(q) \end{aligned}$$

en vertu de l'isomorphisme de faisceaux inversibles métrisés du corollaire 2.2. Si x n'appartient pas au support de D_0, l'argument de la preuve du lemme 3.9 implique que $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}_0}}(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour $x \notin D_0$, on a

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(x) \geqslant -\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(q).$$

L'intersection des D_i pour $i \neq 0$ est un sous-schéma fermé de $\overline{G}$ que la projection π identifie canoniquement à A et la restriction de $\mathcal{L}_0$ s'identifie alors au fibré trivial. Ainsi, si x est dans tous les D_i mais pas dans D_0, et si de plus $\pi(x) = -q$, on a $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(x) = -\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{M}}}(q)$.

De la même manière, on prouve que si $x \notin D_i$,

$$\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}}(x) \geqslant -\widehat{\mathrm{h}}_{\overline{\mathcal{M}}}\bigl(q - (t+1)q_i\bigr)$$

et que cette minoration est optimale sur $\overline{G} \setminus D_i$. □

COROLLAIRE 4.6. – *On a $\mu(\overline{G}) \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si G est une variété semi-abélienne isotriviale.*

5. Variantes de la conjecture de Bogomolov

Soit G une variété semi-abélienne sur un corps de nombres $k \subset \overline{\mathbf{Q}}$. On fixe une compactification $\overline{G}$ ainsi qu'une hauteur normalisée comme précédemment. Soient X une sous-variété irréductible de G et $\overline{X}$ son adhérence dans $\overline{G}$. Rappelons qu'on appelle sous-variété de torsion de G toute sous-variété de $G \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ qui est la translatée d'un sous-groupe algébrique de $G \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ par un point de torsion.

F. Bogomolov énonce dans [4] une conjecture sur la hauteur de Néron–Tate des points algébriques des sous-variétés d'une variété abélienne. Cet énoncé se généralise aux variétés semi-abéliennes de la façon suivante.

ÉNONCÉ 5.1 (Généralisation de la conjecture de Bogomolov). –
(1) *L'ensemble des sous-variétés de torsion contenues dans X n'a qu'un nombre fini d'éléments maximaux.*
(2) *Si X^* désigne le complémentaire dans X des sous-variétés de torsion contenues dans X, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X^*(\overline{\mathbf{Q}})$, $\widehat{\mathrm{h}}(x) > \varepsilon$.*

Ainsi que l'a montré Zhang dans [33], cet énoncé équivaut dans le cas des variétés abéliennes à un autre énoncé que Philippon avait conjecturé indépendamment [23].

ÉNONCÉ 5.2 (Généralisation de la conjecture de Philippon). – *La variété $\overline{X}$ est de hauteur normalisée nulle si et seulement si X est une sous-variété de torsion de G.*

La conjecture d'équirépartition que nous énonçons ci-dessous a été introduite par Szpiro, Ullmo et Zhang dans [29] lorsque G est une variété abélienne ; il y est prouvé qu'elle équivaut dans ce cas à la conjecture de Bogomolov précédente. L'équirépartition des suites de petits points joue un rôle essentiel dans les démonstrations par Ullmo et Zhang des analogues abéliens des énoncés 5.1 et 5.2.

ÉNONCÉ 5.3 (Conjecture d'équirépartition des petits points). – *Soit* (x_n) *une suite de points de* $G(\overline{\mathbf{Q}})$ *dont la hauteur normalisée tend vers* 0 *et telle qu'aucune sous-suite ne soit contenue dans un sous-groupe algébrique strict de* G. *Désignons par* $O(x_n)$ *l'adhérence schématique de* x_n *dans* G *et* $\delta_{O(x_n)}$ *la mesure de comptage sur l'ensemble fini* $O(x_n)(\mathbf{C})$. *Alors, la suite de mesures de probabilité* $\frac{1}{\#O(x_n)}\,\delta_{O(x_n)(\mathbf{C})}$ *converge vaguement vers la mesure de Haar normalisée portée par le sous-groupe compact maximal de* $G(\mathbf{C})$.

Lorsque X est une variété abélienne, ces trois énoncés sont vrais (*voir* [30], [35] et [10]). Lorsque X est un tore, les deux premiers énoncés ont été démontrés par Zhang dans [34] puis par d'autres méthodes par Bombieri–Zannier [5] et Schmidt [26]. L'énoncé d'équirépartition est dans ce cas un théorème de Y. Bilu [3].

Dans le cas semi-abélien, ces énoncés ne sont pas forcément équivalents et nous allons même donner un contre-exemple à l'énoncé 5.2 un peu plus bas. Néanmoins, si $\mu(\overline{X}) \geqslant 0$, c'est-à-dire si la hauteur de tous les points de $\overline{G}$ est positive, on peut dire quelque chose.

LEMME 5.4. – *Si* $\mu(\overline{X}) \geqslant 0$, *les énoncés* 5.1 *et* 5.2 *sont équivalents.*

Démonstration. – Bien qu'il faille juste reprendre les arguments utilisés dans l'équivalence des analogues abéliens de ces énoncés, nous détaillons la preuve pour le confort du lecteur.

Lorsque $\mu(\overline{X}) \geqslant 0$, l'inégalité du théorème 1.5 s'écrit en effet

$$e(X) \geqslant \widehat{\mathrm{h}}(\overline{X}) \geqslant \frac{1}{1+\dim X}\, e(X)$$

si bien que la nullité de $\widehat{\mathrm{h}}(\overline{X})$ et celle de $e(X)$ sont équivalentes. Le reste de la preuve procède comme dans [34].

Supposons que l'énoncé 5.1 est vérifié. Si X n'est pas une sous-variété de torsion, X^* est non vide si bien que $e(X) \geqslant \varepsilon > 0$ et donc $\widehat{\mathrm{h}}(X) > 0$. Réciproquement, si X est une sous-variété de torsion, ses points de torsion sont Zariski-denses, ce qui implique $e(X) = 0$ et donc $\widehat{\mathrm{h}}(\overline{X}) = 0$.

Supposons maintenant l'énoncé 5.2 satisfait. Si X n'est pas une sous-variété de torsion, donc si $\widehat{\mathrm{h}}(\overline{X}) > 0$, il existe un ouvert de Zariski non vide U de X tel que si $x \in U$, la hauteur de x est strictement positive. En particulier, U ne rencontre aucune sous-variété de torsion de G et toute sous-variété de torsion de G contenue dans X est contenue dans $X \setminus U$. Par récurrence descendante sur la dimension des composantes irréductibles de $X \setminus U$, on voit que les sous-variétés de torsion maximales contenues dans X sont en nombre fini. Si de plus la borne inférieure de la hauteur normalisée sur l'ouvert complémentaire X^* était nulle, on pourrait en déduire l'existence d'une sous-variété de hauteur nulle qui n'est pas incluse dans les précédentes, et donc d'après l'énoncé 5.2, une autre sous-variété de torsion, ce qui est une contradiction. □

LEMME 5.5. – *Si* $\mu(\overline{X}) \geqslant 0$, *l'énoncé* 5.3 *implique l'énoncé* 5.2.

Démonstration. – Supposons en effet que la hauteur normalisée de $\overline{X}$ est nulle mais que X n'est pas une sous-variété de torsion. Comme on a supposé que $\mu(\overline{X}) \geqslant 0$, le théorème 1.5 implique comme précédemment que $e(X) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une suite (x_n) de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dont la hauteur tend vers 0 et convergeant vers le point générique de X. En particulier, aucune sous-suite n'est contenue dans un sous-groupe algébrique strict. L'énoncé 5.3 implique alors que la suite des mesures $\delta_{O(x_n)(\mathbf{C})}/\#O(x_n)$ converge vaguement vers la mesure de Haar normalisée portée par le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$. Par suite, $X(\mathbf{C})$ contient ce sous-groupe compact maximal. Remarquons alors que le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathbf{C})$ est Zariski-dense dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$; par suite, le sous-groupe compact maximal d'un tore complexe est aussi Zariski-dense, ce qui implique que le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$ est dense dans chaque fibre de $G \to A$. Puisque X est une sous-variété algébrique, elle doit contenir toutes ces fibres, et donc être égale à $\overline{G}$, d'où une contradiction. $\square$

Il résulte des calculs du paragraphe 4 que les variétés semi-abéliennes qui ne sont pas isotriviales sont de hauteur normalisée strictement négative. On a, autrement dit, le théorème suivant :

THÉORÈME 5.6. – *La généralisation* 5.2 *de la conjecture de Philippon est* fausse.

Néanmoins, lorsque G n'est pas isotriviale, $\mu(\overline{G}) < 0$ et il est donc possible (probable ?) que les deux autres conjectures soient vérifiées.

Dans la suite de ce texte, nous allons *démontrer* ces trois conjectures lorsque G est isotriviale. Dans ce cas, $\mu(\overline{G}) = 0$ si bien que l'on a d'ores et déjà les implications

$$\text{Conj. de Bogomolov} \Longleftrightarrow \text{Conj. de Philippon} \Longleftarrow \text{Conj. d'équirépartition.}$$

De plus, il est clair que si les conjectures 5.1 et 5.3 sont vraies pour une variété semi-abélienne G, elles sont vraies pour toute variété semi-abélienne qui lui est isogène. Par suite, il suffit de traiter le cas d'une variété semi-abélienne qui est un produit $A \times T$. La théorie du § 3 se simplifie grandement dans ce cas et on a $\overline{G} = A \times X$.

6. Un théorème d'équirépartition générique en rang torique égal à un

Le théorème principal de cette section est le théorème 6.1 ci-dessous. Dans le cas d'un tore, il s'agit du théorème de Bilu, dont nous donnons en appendice une preuve arakelovienne. Nous généralisons en fait cette preuve et obtenons ainsi un théorème d'équirépartition générique pour les variétés semi-abéliennes de rang torique égal à 1. Une adaptation des méthodes employées par Ullmo puis Zhang pour en déduire la conjecture de Bogomolov pour les variétés abéliennes, ainsi que de la méthode employée par Bilu pour passer de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ à un tore quelconque nous permettra de prouver la conjecture de Bogomolov pour les variétés semi-abéliennes isotriviales au paragraphe suivant.

THÉORÈME 6.1. – *Soient, sur un corps de nombres k, une variété abélienne A et G la variété semi-abélienne* $A \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ *de compactification* $\overline{G} = A \times \mathbf{P}^1$. *Notons* $\pi : \overline{G} \to A$ *la projection naturelle. Soit* $\overline{\mathcal{L}}$ *un fibré ample sur* $\overline{G}$, *muni de sa métrique adélique canonique qui définit une hauteur normalisée sur G au sens de la définition* 3.8.

Soit $V \subset \overline{G}$ *une sous-variété fermée* (*irréductible et de dimension* > 0) *qui rencontre G. Soit* (x_n) *une suite* générique *de* petits points *de* $V(\overline{k})$, *c'est-à-dire qu'on suppose* :

– *qu'aucune sous-suite de* (x_n) *n'est contenue dans un fermé strict de* V ;

– *et que* $\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

On suppose de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

– *ou bien* $V = \overline{G}$;

– *ou bien la projection naturelle* $V(\mathbf{C}) \to A(\mathbf{C})$ *est génériquement finie.*

Fixons une place $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$. *Pour tout n, soit* $O(x_n)$ *l'orbite de* x_n *dans* $\overline{G}$ *sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ *et* $\mu_{O(x_n)}$ *la mesure de probabilité sur* $V(\mathbf{C}_\sigma)$ *portée par* $O(x_n)$ *et invariante sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}_\sigma/k)$.

Alors, *la suite des mesures* $\mu_{O(x_n)}$ *converge vaguement vers la mesure de probabilité* $\nu_{\overline{\mathcal{L}}|V}$, *définie dans la définition* 1.7.

Avant de démontrer le théorème, remarquons que l'on peut supposer

$$\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)} \otimes \pi^* \overline{\mathcal{M}}.$$

On notera D le diviseur «infini» $A \times \{\infty\}$ de $\overline{G}$. On a $\mathcal{O}_{\overline{G}}(D) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$, d'où une section canonique s_D de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$.

Le résultat clef dans la démonstration de ce genre de théorème d'équirépartion par des méthodes de géométrie d'Arakelov est le suivant, démontré par Szpiro, Ullmo et Zhang quand les métriques hermitiennes sont lisses :

PROPOSITION 6.2 (Szpiro, Ullmo, Zhang). – *Considérons un fibré en droites $\overline{\mathcal{L}}$ ample, muni d'une métrique adélique ample sur une variété projective X définie sur un corps de nombres $k \subset \mathbf{C}$. On suppose que X est de hauteur nulle pour $\overline{\mathcal{L}}$. Soient (x_n) une suite générique de petits points dans $X(\overline{\mathbf{Q}})$ et $f : X(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que la propriété suivante soit satisfaite :*

pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, le courant $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) + \varepsilon\, \mathrm{dd}^c f$ est positif sur X.

Alors, on a l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f \mu_{O(x_n)} \geqslant \int_X f \nu_{\overline{\mathcal{L}}}.$$

Démonstration. – Pour ε assez petit, comme dans l'énoncé de la proposition, considérons le fibré en droites métrisé $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$ sur X qui n'est en fait autre que $\overline{\mathcal{L}}$, mais dont la métrique hermitienne à l'infini ($k \subset \mathbf{C}$) est multipliée par $\exp(-\varepsilon f)$. Par définition, le courant de courbure de $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$ est égal à $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) + \varepsilon\, \mathrm{dd}^c f$, donc positif ; en particulier, la métrique adélique de $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$ est semi-positive, si bien qu'on peut appliquer le théorème 1.5 à la suite générique (x_n) et au fibré métrisé $\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)$. On obtient ainsi

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)}(x_n) \geqslant \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)}(X).$$

Calculons alors les deux membres de cette inégalité. Pour le membre de gauche, on a :

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}(\varepsilon f)}(x_n) = \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n) + \varepsilon \int_X f \mu_{O(x_n)},$$

tandis que le membre de droite vaut d'après la proposition 1.8

$$\mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + \varepsilon \int_X f \nu_{\overline{\mathcal{L}}} + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Comme X est de hauteur nulle pour $\overline{\mathcal{L}}$ et comme (x_n) est une suite de petits points, il en résulte en divisant par ε l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f \mu_{O(x_n)} \geqslant \int_X f \nu_{\overline{\mathcal{L}}} + \mathrm{O}(\varepsilon).$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 par valeurs supérieures et la proposition est démontrée. □

On rassemble en un lemme des résultats connus (*voir* par exemple Zhang, [33], 6.4).

LEMME 6.3. – *La norme de la section canonique* s_D *de* $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ *est*

$$\|\mathsf{s}_D\|(z,[t:u]) = \frac{|u|}{\max(|t|,|u|)}, \quad z\in A(\mathbf{C}),\ [t:u]\in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}),$$

et, notant $\zeta = t/u \in \mathbf{C}\cup\{\infty\}$, *on a pour le courant de courbure la formule :*

$$\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}) = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Arg}(\zeta)}{2\pi}\wedge \delta_{|\zeta|=1}.$$

On a noté $[t:u]$ l'unique point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont les coordonnées homogènes sont (t,u). De plus, si X est une variété analytique complexe, $i:Y\hookrightarrow X$ une sous-variété différentielle réelle de X et η une forme différentielle lisse dans un voisinage de Y, on note $\eta\wedge\delta_Y$ le *courant* (porté par Y) $i_*i^*\eta$.

Démonstration. – Comme nous sommes dans une situation produit, le calcul se ramène au calcul analogue sur $\mathbf{P}^1$, avec $D=[1:0]=\infty$. La métrique de Fubini–Study sur $\mathcal{O}(D)$ donne à s_D la norme

$$\|\mathsf{s}_D\|_{\mathrm{FS}}([t:u]) = \frac{|u|}{(|t|^2+|u|^2)^{1/2}}.$$

L'isomorphisme $[n^*]\mathcal{O}(D)\simeq\mathcal{O}(D)^n$ envoie la section $[n]^*\mathsf{s}_D$ sur la section s_D^n. Le procédé limite par lequel $\|\mathsf{s}_D\|$ est définie implique alors que

$$\|\mathsf{s}_D\|([t:u]) = \lim_{n\to\infty}\|\mathsf{s}_D\|_{\mathrm{FS}}([t^n:u^n])^{1/n} = \lim_n \frac{|u|}{(|t|^{2n}+|u|^{2n})^{1/2n})} = \frac{|u|}{\max(|u|,|t|)},$$

comme annoncé.

D'autre part, $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D)})$ est la mesure $\mathrm{dd}^c\log\|\mathsf{s}_D\|+\delta_\infty$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Comme $\log\|\mathsf{s}_D\|$ est, hors du sous-groupe compact maximal S^1, le logarithme de la valeur absolue d'une fonction méromorphe, cette mesure est supportée par le cercle. Elle est de plus invariante par rotation et de masse totale 1. Par suite, l'unicité de la mesure de Haar implique que

$$\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D)}) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\,\mathrm{Arg}(\zeta)\wedge\delta_{|\zeta|=1}.$$

Le lemme est donc démontré. □

LEMME 6.4. – *Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{G}(\mathbf{C})$. Il existe alors une fonction Φ sur $\overline{G}(\mathbf{C})$ ayant les propriétés suivantes :*

- *Φ est continue ;*
- *$\Phi = f$ sur le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$;*
- *pour tout $\varepsilon>0$ assez petit, $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})+\varepsilon\,\mathrm{dd}^c\Phi$ est un courant de type $(1,1)$* positif *sur $\overline{G}$.*

Démonstration. – Avec les notations du lemme 6.3, il nous suffit de construire une fonction continue Φ sur $A\times\mathbf{P}^1$ (dont les coordonnées homogènes sont toujours notées $[t:u]$) vérifiant les propriétés suivantes :

- Φ est continue ;
- pour tout $z\in A$ et tout $\theta\in\mathbf{R}$, $\Phi(z,[\mathrm{e}^{i\theta}:1]) = f(z,[\mathrm{e}^{i\theta}:1])$;
- pour tout ε assez petit, $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})+\varepsilon\mathrm{dd}^c\Phi$ est un courant de type $(1,1)$ positif.

Posons, pour $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\Phi(z,[t:u]) = f(z,[t:u]) + \lambda \log \frac{|t|^2+|u|^2}{2\max(|t|^2,|u|^2)},$$

de sorte que les deux premières conditions sont satisfaites. On a, notant $\zeta = t/u = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$,

$$\mathrm{dd}^c\Phi = \mathrm{dd}^c f + \lambda \frac{i}{2\pi(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta} - \lambda \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \wedge \delta_{r=1}.$$

D'autre part, on a une expression de la forme

$$\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) = \pi^*\omega_A + \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \wedge \delta_{r=1},$$

où $\omega_A = \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})$ est une forme différentielle de type $(1,1)$ lisse sur A et strictement positive. Ainsi,

$$\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) + \varepsilon \mathrm{dd}^c\Phi = \left(\pi^*\omega_A + \varepsilon\lambda \frac{i}{2\pi(1+|t|^2)^2}\,\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\overline{\zeta} + \varepsilon \mathrm{dd}^c f\right) + (1-\varepsilon\lambda)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \wedge \delta_{r=1}.$$

Nous allons montrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\lambda = \lambda_0$, le premier terme est une forme différentielle de type $(1,1)$, lisse et strictement positive. Si de plus $\varepsilon < 1/\lambda_0$, le second terme est un courant positif, ce qui conclura la démonstration du lemme.

Le premier terme s'interprète en effet comme une forme hermitienne sur le fibré tangent de $\overline{G}$. La restriction de ce fibré aux ouverts U_1 et U_2 de $\overline{G}$, définis par $|t| < 2$ et $|t| > 1/2$, est triviale, une base du fibré dual étant donnée par l'adjonction de $\mathrm{d}t$ (resp. de $\mathrm{d}(1/t)$) à une base de Ω^1_A. Dans ces ouverts, cette forme hermitienne s'écrit ainsi par blocs

$$\begin{pmatrix} h_A(z) + \varepsilon a(z,t) & \varepsilon b(z,t) \\ \varepsilon b^*(z,t) & \varepsilon c(z,t) + \varepsilon\lambda\kappa(t) \end{pmatrix},$$

où a, b et c se déduisent des coordonnées de $\mathrm{dd}^c f$ dans les bases locales du fibré cotangent, tandis que $\kappa(t)$ vaut $\bigl(2\pi(1+|t|^2)^2\bigr)^{-1}$ dans U_1 et $\bigl(2\pi(1+|1/t|^2)^2\bigr)^{-1}$ dans U_2. Les coefficients de cette matrice sont en particulier des fonctions *continues* de $(z,t) \in U_1$ (resp. U_2).

Une telle matrice hermitienne est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs. Par relative compacité des deux ouverts U_1 et U_2, il existe ainsi une constante $\varepsilon_1 > 0$ telle que, pour $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, les g premiers mineurs sont > 0 en tout point de $\overline{G}$. Si $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, il reste à s'assurer de la positivité du discriminant de la forme hermitienne. Or, le discriminant s'écrit, en développant suivant la dernière colonne,

$$\varepsilon\bigl(\lambda\kappa(t) + c(z,t)\bigr)\det\bigl(h_A + \varepsilon a(z,t)\bigr) + \mathrm{O}(\varepsilon^2),$$

le O étant uniforme sur U_1 et U_2. Par compacité, il existe λ_0 tel que $\lambda_0\kappa(t) + c(z,t) > 0$ en tout point de $\overline{G}$. Alors, lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0, le premier terme domine et le discriminant est bien strictement positif dès que $\varepsilon > 0$ est assez petit. □

Preuve du théorème 6.1 *quand* $V = \overline{G}$. – Soit $f : \overline{G} \to \mathbf{R}$ une fonction continue que le théorème de Stone–Weierstraß nous permet en fait de supposer $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{G}$. Choisissons une fonction Φ comme dans le lemme 6.4. En lui appliquant la proposition 6.2, il en résulte l'inégalité

$$(\star)\qquad \liminf_n \int_{\overline{G}} \Phi \mu_{O(x_n)} \geqslant \int_{\overline{G}} \Phi \nu_{\overline{\mathcal{L}}}.$$

LEMME 6.5. – *La mesure* $c_1(\overline{\mathcal{L}})^{\dim G}$ *(définie par la proposition-définition* 1.7*) est un multiple de la mesure de Haar portée par le sous-groupe compact maximal de* $G(\mathbf{C})$.

Démonstration. – En effet, la dernière formule du lemme 6.3 implique que le support de cette mesure est contenu dans le sous groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$. D'autre part, les métriques hermitiennes étant invariantes par translation d'un point de torsion, cette mesure est invariante par translation d'un point de torsion de $G(\mathbf{C})$. Comme les points de torsion de G sont denses (pour la topologie complexe) dans le sous-groupe compact maximal, cette mesure est invariante par translation par tout point du sous-groupe compact maximal. C'est donc un multiple de la mesure de Haar. □

Il s'ensuit que l'on peut remplacer Φ par f dans le second membre de l'inégalité $(\star)$.

LEMME 6.6. – *On a*

$$\lim_n \int_{O(x_n)} (\Phi - f)\mu_{O(x_n)} = 0.$$

Preuve du lemme. – On sait que $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n)$ tend vers 0. Écrivons $x_n = (z_n, t_n)$ pour $z_n \in A$ et $t_n \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, de sorte que

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n) = h_{\overline{\mathcal{M}}}(z_n) + h_{\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}}(t_n)$$

et ces deux termes étant positifs, ils tendent tous deux vers 0. La décomposition en facteurs locaux positifs de la hauteur de Weil sur $\mathbf{P}^1$ implique alors que le terme local à l'infini tend aussi vers 0.

Comme la fonction $(z,t) \mapsto -\log\max(1,|t|) = \delta(t)$ mesure la «distance» au sous-groupe compact maximal de G, les conjugués de x_n tendent en moyenne vers ce sous-groupe compact maximal. Précisément, si $t \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbf{Q}})$,

$$h_{\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}}(t) \geqslant -\frac{1}{\#O(t)} \sum_{\tau \in O(t)} \log\max(1,|\tau|) \geqslant \alpha \frac{\#\{\tau \in O(t)\,;\, \delta(t) \geqslant \alpha\}}{\#O(t)}.$$

(C'est l'inégalité de Bienaymé–Tchébitchev.) Par suite, si (α_n) est une suite de réels positifs, la proportion des conjugués de x_n dont la distance au sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$ est supérieure à α_n est majorée par $h(x_n)/\alpha_n$. D'autre part, la fonction $\Phi - f$ est continue, nulle sur le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$; il existe donc une fonction $\alpha \mapsto \omega(\alpha)$ tendant vers 0 en 0 telle que si la distance de x au sous-groupe compact maximal est inférieure à α, $|(f-\Phi)(x)| \leqslant \omega(\alpha)$. On a alors l'inégalité

$$\left|\int_V (\Phi - f)\mu_{O(x_n)}\right| \leqslant \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{\text{points proches}} + \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{\text{points loins}} \leqslant \omega(\alpha_n) + \|f - \Phi\| \frac{h(x_n)}{\alpha_n}.$$

Il suffit de choisir $\alpha_n = \sqrt{h(x_n)}$ pour obtenir le lemme annoncé.

Remarquons que ce lemme n'a pas fait intervenir V et implique que toute mesure limite d'une suite de mesures de la forme $(\mu_{O(x_n)})$ pour une suite (x_n) de petits points est concentrée sur le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$. □

En utilisant le lemme, nous obtenons l'inégalité

$$(\star\star)\qquad \liminf_n \int_{\overline{G}} f\mu_{O(x_n)} \geqslant \int_G f\nu_{\overline{\mathcal{L}}}.$$

En appliquant cette inégalité à $-f$, nous en déduisons le théorème 6.1 quand $V=\overline{G}$, c'est-à-dire le théorème d'équirépartition pour une suite générique dans une variété semi-abélienne de rang torique 1. □

Preuve du théorème 6.1 *quand* $V\neq\overline{G}$. – Donnons-nous une fonction continue f sur $V(\mathbf{C})$. En vertu des théorèmes de Tietze–Urysohn et Stone–Weierstraß, nous pouvons supposer que f est la restriction à V d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{G}(\mathbf{C})$.

Soit $V'\subset V$ l'ensemble des points où la projection naturelle $\pi: V\to A$ n'est pas étale. Comme V est irréductible, $\dim V'<\dim V$ et son image $\pi(V')$ est de dimension $<\dim A$.

Fixons une famille $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $A(\mathbf{C})$ telles que pour tout $\lambda>0$, on a :
- $0\leqslant\rho_\lambda\leqslant 1$;
- $\rho_\lambda=0$ dans un voisinage ouvert U_λ de $\pi(V')$;
- $\rho_\lambda=1$ hors d'un voisinage W_λ de $\pi(V')$;

et telle que de plus ρ_λ converge simplement vers la fonction caractéristique du complémentaire dans $\pi(V')$ quand $\lambda\to 0$. Définissons ensuite une fonction f_λ sur $\overline{G}(\mathbf{C})$ en posant $f_\lambda=f\cdot\rho_\lambda\circ\pi$.

LEMME 6.7. – *Pour tout* $\lambda>0$, *il existe* $\varepsilon_\lambda>0$ *tel que pour* $|\varepsilon|<\varepsilon_\lambda$, *le courant de type* $(1,1)$, $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_V)+\varepsilon\,\mathrm{dd}^c f_\lambda$ *est positif ou nul.*

Preuve du lemme. – En effet, il est positif dans le voisinage $\pi^{-1}(U_\lambda)\cap V$ de V' puisque f_λ y est nul et $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_V)$ y est positif. De plus, sur $V\smallsetminus\pi^{-1}(U_\lambda)$, le courant $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$ est minoré par le courant $\pi^*\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})$, lequel est strictement positif puisque $\pi: V\to A$ est étale hors de $\pi^{-1}(U_\lambda)\supset V'$. Ainsi, pour ε assez petit, $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_V)+\varepsilon\,\mathrm{dd}^c f_\lambda$ est positif hors de U_λ. □

Le lemme précédent montre que nous pouvons appliquer la proposition 6.2 aux fonctions f_λ et $-f_\lambda$, d'où l'égalité

$$(\star\star\star)\qquad \lim_n \int_V f_\lambda\mu_{O(x_n)} = \int_V f_\lambda\nu_{\overline{\mathcal{L}}|V}.$$

Remarquons maintenant que la suite $\pi(x_n)$ est une suite générique de petits points dans A. D'après le théorème d'équirépartition de Szpiro, Ullmo et Zhang [29], la suite $\pi(x_n)$ est donc équirépartie dans $A(\mathbf{C})$ pour la mesure μ_A de Haar normalisée de $A(\mathbf{C})$. En particulier,

$$\limsup_n \int_V |f-f_\lambda|\mu_{O(x_n)} \leqslant \|f\|\mu_A(W_\lambda).$$

Quand $\lambda\to 0$, $\mu_A(W_\lambda)$ tend par convergence dominée vers $\mu_A(V')=0$.

De même, quand $\lambda\to 0$, $\int_V f_\lambda\nu_{\overline{\mathcal{L}}|V}$ converge vers $\int_V(1-\mathbf{1}_{\pi^{-1}\pi(V')})f\nu_{\overline{\mathcal{L}}|V}$, où $\mathbf{1}_{\pi^{-1}\pi(V')}$ désigne la fonction indicatrice de $\pi^{-1}\pi(V')\subset\overline{G}$. Comme f est bornée, il suffit donc de montrer que

$$\int_V \mathbf{1}_{\pi^{-1}\pi(V')}\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_V)^{\dim V}=0.$$

Ceci est vrai parce que $\pi^{-1}\pi(V')$ est une sous-variété algébrique stricte de V, donc un ensemble complet pluripolaire ; un tel ensemble est ainsi de capacité nulle, c'est-à-dire négligeable pour des mesures du type Bedford–Taylor (*voir* par exemple la proposition 4.6.4 de [15], déjà utilisée dans la justification de la définition 1.7).

Ainsi, en faisant tendre λ vers 0 dans l'égalité ($\star\star\star$), nous obtenons l'égalité du théorème 6.1, lequel se trouve donc démontré. $\square$

7. Preuve de la conjecture de Bogomolov pour les variétés semi-abéliennes isotriviales

THÉORÈME 7.1. – *Si G est une variété abélienne isotriviale, les conjectures* 5.1, 5.2 *et* 5.3 *sont vraies.*

La démonstration de ce théorème est l'objet de ce paragraphe. Remarquons qu'il nous suffit de démontrer la conjecture 5.3 ; comme il a été rappelé au paragraphe 2, la conjecture 5.1 en est une conséquence. On peut aussi supposer que G est un produit $A \times T$.

La première étape de la démonstration consiste à traiter le cas d'une variété semi-abélienne dont le rang torique est égal à 1.

PROPOSITION 7.2. – *Soient G une variété semi-abélienne de rang torique* 1 *sur un corps de nombres k et (x_n) une suite de petits points de $G(\overline{k})$. On suppose que cette suite (x_n) est stricte, c'est-à-dire qu'aucune sous-suite n'est contenue dans un sous-groupe algébrique strict de G. Alors, elle est générique.*

Démonstration. – Raisonnons par l'absurde et supposons, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (x_n) converge vers le point générique d'une sous-variété irréductible V distincte de $\overline{G}$. Comme la hauteur d'un point de $G(\overline{\mathbf{Q}})$ est supérieure ou égale à celle de son image dans la variété abélienne, la suite $(\pi(x_n))$ de points de $A(\overline{\mathbf{Q}})$ est une suite de petits points, stricte puisque la suite (x_n) est stricte dans G. D'après le théorème de Zhang [35] (conjecture de Bogomolov généralisée aux sous-variétés de variétés abéliennes), $\pi(V) = A$. Ainsi, ou bien $\dim V = \dim A$ et la projection $V \to A$ est génériquement étale, ou bien $\dim V > \dim A$ et l'on a $V = \overline{G}$.

On peut de plus supposer que le fibré inversible ample $\mathcal{L}$ choisi sur $\overline{G}$ est égal à $\pi^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. Alors, il résulte du théorème 6.1 que la suite des mesures de probabilité $(\mu_{O(x_n)})$ associée à la suite (x_n) converge vaguement vers la mesure

$$(7.3) \qquad \left(\pi^* \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}}) + \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}|_V)\right)^{\dim V} / \deg_{\mathcal{L}} V.$$

D'après le théorème d'équirépartition de Szpiro, Ullmo et Zhang ([29]), la suite des mesures attachée à la suite $\pi(x_n)$ converge vaguement pour la mesure

$$(7.4) \qquad \left(\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})\right)^{\dim A} / \deg_{\mathcal{M}} A.$$

Cela implique l'égalité de l'image directe sur A de la mesure (7.3) et de la mesure (7.4). En développant l'égalité obtenue, on obtient, usant du fait que $\pi : V \to A$ est génériquement fini, que les courants $T_1 = \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{\dim A - 1} \wedge \pi_* \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}|_V)$ et $T_2 = \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{\dim A}$ sont proportionnels.

LEMME 7.2. – *Le support du courant* $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}|_V)$ *est inclus dans l'intersection de $V(\mathbf{C})$ et du sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$.*

Démonstration. – Hors de l'intersection de $V(\mathbf{C})$ et du sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$, la formule donnée dans le lemme 6.3 montre que la métrique canonique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)|_V$

est lisse. On peut donc, sur cet ouvert, calculer le courant de courbure en restreignant le courant de courbure de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ sur $\overline{G}(\mathbf{C})$. Le calcul du courant a été fait dans le lemme cité ; il est précisément nul hors du sous-groupe compact maximal. □

Nous reprenons la démonstration de la proposition 7.2 en distinguant deux cas.

Premier cas : supposons que $V \cap D \neq \emptyset$, D désignant le diviseur «à l'infini» dans la compactification $\overline{G} = A \times \mathbf{P}^1$. Comme dans le lemme 6.3, la section canonique s_D de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ s'interprète comme la fonction méromorphe $1/t$. Comme elle n'est pas constante sur V, elle n'est nulle part localement de module constant sur V, si bien qu'on peut trouver une fibre de $V(\mathbf{C}) \to A(\mathbf{C})$ qui ne rencontre pas le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$. En particulier, $\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}|_V)$ est nul au voisinage de cette fibre et par conséquent, le support de T_1 est strictement inclus dans A. Comme T_2 est une forme différentielle partout strictement positive sur A, on a nécessairement $T_1 = 0$.

Or, l'intégrale

$$\int_V \pi^* \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{\dim V - 1} \wedge \mathrm{c}_1\big(\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)}|_V\big)$$

calcule le degré relativement au fibré inversible ample $\mathcal{M}$ du cycle $\pi_*(V \cdot D) \in \mathrm{CH}^*(A)$. La nullité de T_1 implique que ce degré est nul. Or, l'intersection $V \cdot D$ est propre, V n'étant pas contenue dans D, si bien qu'un représentant de $V \cdot D$ est donné par une somme $\sum_i n_i[V_i]$, où les V_i sont les composantes irréductibles de $V \cap D$ et les n_i des entiers strictement positifs. On obtient que $V \cap D = \emptyset$, ce qui est absurde.

Deuxième cas : supposons que $V \cap D = \emptyset$. Dans ce cas, V est affine et propre sur A et $\pi : V \to A$ est fini. Cela fournit une équation pour V dans $A \times \mathbf{P}^1$:

$$t^d + a_1(z)t^{d-1} + \cdots + a_d(z) = 0.$$

Comme $V \cap D = \emptyset$, on voit que pour tout i, a_i est une fonction régulière sur A, donc une constante. Autrement dit, $V = A \times V_1$, où V_1 est un ensemble *fini* de points de $\mathbf{A}^1$. On en déduit qu'il existe une suite de points de V_1 dont les hauteurs tendent vers 0, si bien que V_1 contient un point de torsion. Puisque V est irréductible, V_1 est formé de points de torsion et V est une sous-variété de torsion, contrairement à l'hypothèse que la suite (x_n) est stricte. Nous avons donc démontré que la suite (x_n) est générique dans G. □

Preuve de la conjecture 5.3. – Soit (x_n) une suite stricte de petits points de $G(\overline{k})$. Pour simplifier les notations, on note ν_G la mesure de Haar normalisée portée par le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$.

Pour tout caractère du tore $\psi : T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, on peut pousser la situation le long de ψ, ce qui nous fournit une variété semi-abélienne $G_\psi = A \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ de rang torique 1, munie d'un morphisme $\psi : G \to G_\psi$, ainsi qu'une suite de petits points $x_{\psi,n} = \psi(x_n) \in G_\psi(\overline{k})$. Sauf si ψ est le caractère trivial, cette suite est stricte. D'après la proposition précédente, elle est donc générique.

La suite des orbites $\delta_{O(x_{\psi,n})}$ est, en vertu de la proposition 7.2, équirépartie pour la mesure de Haar normalisée ν_{G_ψ}.

Alors, si μ est une valeur d'adhérence de la suite de mesures $\delta_{O(x_n)}$, on voit que pour tout caractère ψ non trivial, $\psi_*\mu = \nu_{G_\psi}$.

D'autre part, le support de μ est inclus dans l'intersection des images réciproques par ψ du sous-groupe compact maximal de $G_\psi(\mathbf{C})$, c'est-à-dire que μ est une mesure de probabilité portée par le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$.

Or, la mesure ν_G a toutes ces propriétés et la théorie des séries de Fourier implique que $\mu = \nu_G$. Comme l'ensemble des mesures de probabilité sur $\overline{G}(\mathbf{C})$ est compact pour la topologie faible-$*$

(théorème de Banach–Alaoglu), la suite $\delta_{O(x_n)}$ converge vers la mesure ν_G, ainsi qu'il fallait le démontrer. □

Nous avons donc prouvé l'analogue de la conjecture de Bogomolov pour une variété semi-abélienne isotriviale.

Remerciements

Je voudrais remercier Daniel Bertrand pour m'avoir incité à réfléchir à ces questions, ainsi que Ahmed Abbes, Sinnou David, Vincent Maillot, Bjorn Poonen et Paul Vojta pour leur intérêt dans ce travail. Je voudrais aussi remercier Klaus Künnemann et Michel Raynaud pour leur aide à propos du lemme 2.3.

Appendice : le théorème d'équirépartition de Bilu via la géométrie d'Arakelov

Nous démontrons dans ce paragraphe un théorème d'équirépartition pour une suite générique de petits points (ce qui revient à stricte, dans ce cas) dans $\mathbf{P}^1$ dû initialement à Bilu [3]. Il a montré comment en déduire la conjecture de Bogomolov pour un tore (*i.e.* quand $A = 0$, avec nos notations).

THÉORÈME (Bilu). – *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbf{Q}}) = \overline{\mathbf{Q}}^*$. On suppose :*
– *qu'aucune sous-suite n'est constante (*i.e., *la suite (x_n) est générique) ;*
– *que la hauteur normalisée de x_n tend vers 0 quand $n\to+\infty$.*
Notons $O(x_n)$ l'adhérence de $x_n \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ dans $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Alors, pour toute fonction continue $f:\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\to\mathbf{R}$, on a la convergence :

$$\frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)} \sum_{x\in O(x_n)(\mathbf{C})} f(x) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Autrement dit, la suite des mesures $\frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)}\delta_{O(x_n)(\mathbf{C})}$ converge vaguement vers la mesure de Haar normalisée sur le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$.

Démonstration. – La densité des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans les fonctions continues sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ nous permet de supposer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Soit alors $\Phi:\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\to\mathbf{R}$ continue telle que :
– $\Phi = f$ sur S^1 ;
– Φ est harmonique sur les deux disques de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ bordés par S^1 (d'équations en coordonnée inhomogène, $|z|<1$ et $|z|>1$).

L'existence et l'unicité de Φ est classique (noyau de Poisson), on vérifie par un calcul explicite que $\mathrm{dd}^c\Phi$ est une mesure portée par le cercle unité, absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur ce cercle. En effet, soit $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{c}_n\,\mathrm{e}^{in\theta}$ la série de Fourier de f sur le cercle unité ; on pose

$$\Phi(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{c}_n \min(r^n, r^{-n})\,\mathrm{e}^{in\theta}.$$

Alors,

$$\mathrm{dd}^c\Phi = -\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |n|\mathrm{c}_n\,\mathrm{e}^{in\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\wedge\delta_{r=1},$$

est une mesure concentrée sur le cercle unité, absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur le cercle unité.

Soit $\overline{\mathcal{L}}$ le fibré inversible hermitien $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ muni de sa métrique canonique, dont la forme de courbure est la mesure de Haar $\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$ portée par le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{C}^*$. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, définissons $\overline{\mathcal{L}}(\lambda\Phi)$ comme le fibré en droites hermitien suivant : c'est $\mathcal{L}$ comme fibré en droites, la métrique étant celle de $\overline{\mathcal{L}}$ multipliée par $\exp(-\lambda\Phi)$. La forme de courbure de $\overline{\mathcal{L}}(\lambda\Phi)$ est égale à

$$\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) + \lambda \mathrm{dd}^c\Phi.$$

Autrement dit, elle est nulle hors du sous-groupe compact maximal et positive sur le cercle unité si $|\lambda|$ est assez petit.

D'après le théorème 1.10 de [34] sur l'amplitude arithmétique, conséquence du théorème de Hilbert–Samuel arithmétique, on a

$$\liminf_n \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}(\lambda\Phi)}(x_n) \geqslant \mathrm{h}_{\overline{\mathcal{L}}(\lambda\Phi)}(\mathbf{P}^1),$$

soit

$$\liminf_n \lambda\left(\frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)} \sum_{x\in O(x_n)} \Phi(x)\right) \geqslant \lambda \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} \Phi \mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) + \mathrm{O}(\lambda^2).$$

Si l'on fait tendre λ vers 0, par valeurs supérieures ou inférieures, on obtient alors

$$\lim_n \frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)} \sum_{x\in O(x_n)} \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme $\Phi = f$ sur S^1, on peut remplacer Φ par f dans cette dernière intégrale. D'autre part, la hauteur d'un point $\xi \in \overline{\mathbf{Q}}^*$ est minorée par la demi-somme des composantes archimédiennes des hauteurs de ξ et ξ^{-1}, c'est-à-dire

$$\mathrm{h}(\xi) \geqslant \frac{1}{2[\mathbf{Q}(\xi):\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\,:\,\mathbf{Q}(\xi)\to\mathbf{C}} \log\max\bigl(|\sigma(\xi)|, |\sigma(\xi)|^{-1}\bigr),$$

soit

$$\mathrm{h}(\xi) = \frac{1}{\operatorname{Card} O(\xi)} \sum_{x\in O(\xi)} \frac{1}{2}\log\max\bigl(|x|, |x|^{-1}\bigr).$$

Notons que la fonction $x \mapsto d(x) = \frac{1}{2}\log\max(|x|, |x|^{-1})$ mesure la «distance» de x au cercle unité.

Comme la suite $\mathrm{h}(x_n)$ tend vers 0 et comme aucune sous-suite n'est constante, le théorème de Northcott implique que $\lim \operatorname{Card} O(x_n) = +\infty$. Soit pour tout n un réel $\alpha_n > 0$; on suppose que $\alpha_n \to 0$. La proportion des $x \in O(x_n)$ tels que $d(x) \geqslant \alpha_n$ s'estime ainsi :

$$\operatorname{Card}\{x \in O(x_n)\,;\, d(x) \geqslant \alpha_n\} \leqslant \operatorname{Card} O(x_n)\frac{\mathrm{h}(x_n)}{\alpha_n}.$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
&\Bigl|\sum_{x\in O(x_n)} f(x) - \sum_{x\in O(x_n)} \Phi(x)\Bigr| \\
&\quad\leqslant \sum_{d(x)\geqslant\alpha_n} |f(x)-\Phi(x)| + \sum_{d(x)\leqslant\alpha_n} |f(x)-\Phi(x)| \\
&\quad\leqslant \operatorname{Card}\{x\in O(x_n); d(x)\geqslant\alpha_n\}\|f-\Phi\|_\infty + \operatorname{Card} O(x_n) \sup_{d(x)\leqslant\alpha_n} |f-\Phi| \\
&\quad\leqslant \operatorname{Card} O(x_n)\left(\frac{\mathrm{h}(x_n)}{\alpha_n}\|f-\Phi\|_\infty + \mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

d'après l'uniforme continuité de $f-\Phi$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et le fait que $\alpha_n \to 0$. On choisit maintenant $\alpha_n = \sqrt{\mathrm{h}(x_n)}$. Ainsi,

$$\frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)} \sum_{x\in O(x_n)} f(x) - \frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)} \sum_{x\in O(x_n)} \Phi(x)$$

converge vers 0.

En définitive, nous avons prouvé que

$$\frac{1}{\operatorname{Card} O(x_n)} \sum_{x\in O(x_n)} f(x)$$

converge vers

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta,$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

RÉFÉRENCES

[1] BEDFORD E., TAYLOR B., A new capacity for plurisubharmonic functions, *Acta Math.* **149** (1982) 1–40.

[2] BERTRAND D., Mimimal heights and polarizations on group varieties, *Duke Math. J.* **80** (1) (1995) 223–250.

[3] BILU YU., Limit distribution of small points on algebraic tori, *Duke Math. J.* **89** (3) (1997) 465–476.

[4] BOGOMOLOV F.A., Points of finite order on abelian varieties, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **44** (4) (1980) 782–804, 973.

[5] BOMBIERI E., ZANNIER U., Algebraic points on subvarieties of $\mathbf{G}_m^n$, *Int. Math. Res. Notices* **7** (1995) 333–347.

[6] BOSCH S., LÜTKEBOHMERT W., RAYNAUD M., *Néron Models*, Ergeb., Vol. **21**, Springer-Verlag, 1990.

[7] BOST J.-B., GILLET H., SOULÉ C., Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994) 903–1027.

[8] CHAMBERT-LOIR A., Géométrie d'Arakelov et hauteurs canoniques sur des variétés semi-abéliennes, *Math. Ann.* **314** (1999) 381–401.

[9] CHAMBERT-LOIR A., TSCHINKEL YU., Torseurs arithmétiques et espaces fibrés, *E-print, math.NT/9901006*, 1999.

[10] DAVID S., PHILIPPON P., Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes, in: *International Conference on Discrete Mathematics and Number Theory (Tiruchirapelli, 1996)*, Contemp. Math., 1998, pp. 333–364.

[11] DEMAILLY J.-P., Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in: *Complex Analysis and Geometry*, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993, pp. 115–193.
[12] GILLET H., SOULÉ C., Arithmetic intersection theory, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **72** (1990) 94–174.
[13] HARTSHORNE R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., Vol. **52**, Springer-Verlag, 1977.
[14] HINDRY M., Autour d'une conjecture de Serge Lang, *Invent. Math.* **93** (1988) 419–450.
[15] KLIMEK M., *Pluripotential Theory*, London Math. Society Monographs, Vol. **6**, Clarendon Press, 1991.
[16] KNOP F., LANGE H., Some remarks on compactifications of commutative algebraic groups, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985) 497–507.
[17] KÜNNEMANN K., Higher Picard varieties and the height pairing, *Amer. J. Math.* **118** (4) (1996) 781–797.
[18] KÜNNEMANN K., Projective regular models for abelian varieties, semi-stable reduction, and the height pairing, *Duke Math. J.* **95** (1) (1998) 161–212.
[19] LAURENT M., Équations diophantiennes exponentielles, *Invent. Math.* **78** (1984) 299–327.
[20] LAWTON W.M., A generalization of a theorem of Kronecker, *J. Sci. Fac. Chiang Mai Univ.* **4** (1977) 15–23.
[21] MAILLOT V., Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, *Mémoires de la Soc. Math. de France* **80** (2000).
[22] MCQUILLAN M., Division points on semi-abelian varieties, *Invent. Math.* **120** (1995) 143–159.
[23] PHILIPPON P., Sur des hauteurs alternatives, I, *Math. Ann.* **289** (1991) 255–283.
[24] POONEN B., Mordell–Lang plus Bogomolov, *Invent. Math.* **137** (2) (1999) 213–245.
[25] RAYNAUD M., Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion, in: Artin M., Tate J. (Eds.), *Arithmetic and Geometry. Papers dedicated to I.R. Shafarevich*, Progr. Math., Vol. **35**, Birkhäuser, 1983, pp. 327–352.
[26] SCHMIDT W., Heights of points on subvarieties of $\mathbf{G}_m^n$, in: *Number Theory (Paris 1993–1994)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. **235**, Cambridge Univ. Press, 1996, pp. 157–187.
[27] SERRE J.-P., Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, in: Astérisque, Vol. **69-70**, Astérisque, Soc. Math. France, 1979, pp. 191–202.
[28] SOULÉ C., ABRAMOVICH D., BURNOL J.-F., KRAMER J., *Lectures on Arakelov Geometry*, Cambridge Studies in Advances Mathematics, Vol. **33**, Cambridge University Press, 1992.
[29] SZPIRO L., ULLMO E., ZHANG S.-W., Équidistribution des petits points, *Invent. Math.* **127** (1997) 337–348.
[30] ULLMO E., Positivité et discrétion des points algébriques des courbes, *Ann. of Math.* **147** (1) (1998) 167–179.
[31] VOJTA P., Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I, *Invent. Math.* **126** (1996) 133–181.
[32] VOJTA P., Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, II, *Amer. J. Math.* **121** (2) (1999) 283–313.
[33] ZHANG S.-W., Positive line bundles on arithmetic varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995) 187–221.
[34] ZHANG S.-W., Small points and adelic metrics, *J. Algebraic Geometry* **4** (1995) 281–300.
[35] ZHANG S.-W., Equidistribution of small points on abelian varieties, *Ann. of Math.* **147** (1) (1998) 159–165.

(Manuscrit reçu le 5 novembre 1998 ;
accepté, après révision, le 18 novembre 1999.)

Antoine CHAMBERT-LOIR
Institut de mathématiques de Jussieu,
Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris-VI),
4, place Jussieu,
75252 Paris cedex 05, France
E-mail: chambert@math.jussieu.fr