Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 40, 2007, p. 51 à 112.

SUR LE CHANGEMENT DE BASE STABLE DES INTÉGRALES ORBITALES PONDÉRÉES

PAR PIERRE-HENRI CHAUDOUARD

RÉSUMÉ. – Soit G' un groupe réductif connexe et quasi-déployé sur un corps p-adique F. Soit E une extension cyclique de F. Pour étudier le changement de base de E à F, on associe à ces données un espace tordu G^* au sens de Labesse. Soit G une forme intérieure de G^*. Lorsque G' est $GL(n)$, $SL(n)$ ou plus généralement un groupe que nous appelons $\mathcal{L}$-stable, on définit une notion de transfert non-invariant entre les intégrales orbitales pondérées sur G et celles sur G'. Nous prouvons l'existence d'un tel transfert. Ceci avait été conjecturé par Labesse pour $G' = GL(n)$. La preuve repose sur des résultats antérieurs d'analyse harmonique locale sur les algèbres de Lie et sur un théorème sur les (G,M)-familles d'Arthur, dû à Waldspurger.

ABSTRACT. – Let G' be a quasi-split connected reductive group over a p-adic field F. Let E be a cyclic extension of F. In the context of cyclic base change, we can attach to G' and E a twisted space G^* (in the sense of Labesse). Let G be an inner form of G^*. If G' is $GL(n)$, $SL(n)$ or more generally a group which we call $\mathcal{L}$-stable, we define and prove the existence of a non-invariant transfer between the weighted orbital integrals of G and those of G'. For $GL(n)$, such a transfer has been conjectured by Labesse. The proof is based on previous results of harmonic analysis on Lie algebras and on a generalization of a result of Waldspurger concerning Arthur's (G,M)-families.

Table des matières

0. Introduction

Soient F un corps de nombres, $\mathbb{A}$ son anneau des adèles, G un groupe réductif connexe défini sur F et θ un F-automorphisme de G. Soient $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G et

$\mathbf{G} = G \rtimes \theta \subset G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$. Alors $\mathbf{G}$ est naturellement un G-espace tordu au sens de Labesse (cf. [26] I.3). On entend par là que $\mathbf{G}$ est un G-espace homogène principal (pour l'action par translation à gauche de G) muni du morphisme G-équivariant de $\mathbf{G}$ vers $\mathrm{Aut}(G)$ défini par

$$g \rtimes \theta \mapsto \mathrm{Ad}(g) \circ \theta.$$

Le morphisme ci-dessus permet de définir une action à droite de G sur $\mathbf{G}$ et donc une action par conjugaison de G sur $\mathbf{G}$ donnée par

$$x(g \rtimes \theta)x^{-1} = xg\theta(x)^{-1} \rtimes \theta$$

pour tous g et x dans G. Pour toute fonction f lisse à support compact sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A}) \rtimes \theta$, on sait définir un opérateur intégral sur l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ dont le noyau est donné par

$$k_f(x,y) = \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)} f\bigl(x^{-1}\gamma y\bigr)$$

pour x et y dans $G(\mathbb{A})$ (cf. par exemple [26] V.1). On peut développer $k_f(x,x)$ de deux manières différentes : l'une repose sur la décomposition spectrale de Langlands de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ et l'autre sur la partition de $\mathbf{G}(F)$ en classes de $G(F)$-conjugaison. En première approximation, la formule des traces tordue (établie par Arthur lorsque θ est l'identité et étendue par Clozel, Labesse et Langlands dans des notes non publiées) s'obtient par intégration terme à terme, sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, de ces développements. En fait, la partie continue de la décomposition spectrale d'une part et les classes de conjugaison non elliptiques d'autre part donnent des contributions divergentes. Il faut à la suite d'Arthur remplacer le noyau par un noyau « tronqué ». On obtient alors une formule qui comprend, outre des caractères du côté spectral et des intégrales orbitales du côté géométrique, des termes plus exotiques : les caractères pondérés et les intégrales orbitales pondérées. Ces dernières se décomposent en intégrales orbitales pondérées locales qui sont le centre d'intérêt du présent article.

Désormais F est un corps p-adique et f est une fonction lisse à support compact sur $\mathbf{G}(F)$. Soit (P_0, M_0) un couple formé d'un sous-groupe parabolique minimal P_0 de G et d'un facteur de Lévi M_0 de P_0, tous deux définis sur F. Quitte à composer θ avec un automorphisme intérieur, on peut et on va supposer que ce couple est θ-stable. Soit M un sous-groupe de Lévi de G et Q un sous-groupe parabolique de G, tous deux définis sur F et θ-stables et tels qu'on ait l'inclusion

$$M_0 \subset M \subset Q.$$

On peut alors former les sous-espaces $\mathbf{M} = M \rtimes \theta$ et $\mathbf{Q} = Q \rtimes \theta$. On appelle de tels espaces respectivement un sous-espace de Lévi et un sous-espace parabolique de $\mathbf{G}$. Soit $\delta \in \mathbf{M}(F)$ un élément semi-simple et G-régulier. Son centralisateur G_δ dans G est alors un tore. À la suite d'Arthur (cf. [3] §1, §2, voir aussi la section 1 du présent article), on associe à tout tel triplet $(\mathbf{Q}, \mathbf{M}, \delta)$ un poids $v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}$ et une intégrale orbitale pondérée $J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta, f)$. Le poids $v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}$ est une fonction positive sur $G(F)$, qui vaut identiquement 1 lorsque M est un facteur de Lévi de Q et qui est invariante à gauche par $M(F)$. L'intégrale orbitale pondérée est alors définie par

$$J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta, f) = \bigl|D^{\mathbf{G}}(\delta)\bigr|_F^{1/2} \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f\bigl(x^{-1}\delta x\bigr) v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(x)\, dx.$$

Le discriminant de Weyl $D^{\mathbf{G}}(\delta)$ est simplement un facteur de normalisation. L'intégrale $J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta, f)$ ne dépend que de la classe de $M(F)$-conjugaison de δ. Lorsque M est un facteur de Lévi de Q, l'intégrale est une intégrale orbitale ordinaire. Dans les autres cas, la distribution $J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta, \cdot)$ n'est pas invariante par conjugaison.

L'une des principales applications de la formule des traces tordue est l'obtention de cas de fonctorialité de Langlands entre un groupe et ses groupes endoscopiques, par exemple la correspondance de Jacquet et Langlands, le changement de base ou encore la fonctorialité entre $GL(n)$ et les groupes classiques. Suivant la stratégie de Langlands, il faut d'abord établir à toute place l'existence d'un transfert local $f \to f^{G'}$ qui relie les intégrales orbitales ordinaires sur $G \rtimes \theta$ aux intégrales orbitales stables sur les groupes endoscopiques G' de $G \rtimes \theta$. On doit ensuite comprendre comment se comportent sous transfert les autres termes géométriques de la formule des traces. Comme les fonctions $f^{G'}$ ne sont « définies » que par leurs intégrales orbitales (stables), il faut travailler avec une version invariante (et même stable) de la formule des traces, dont les termes géométriques sont des avatars invariants des intégrales orbitales pondérées.

Arthur a des conjectures très précises sur le transfert des intégrales orbitales pondérées invariantes, qu'il sait démontrer sous l'hypothèse du lemme fondamental pondéré (cf. la série d'articles [6–8]). Ce « lemme » est en fait une conjecture difficile qui généralise le célèbre lemme fondamental de Langlands et Shelstad. Il n'est pas connu en général. Cependant, pour $GL(n)$ et le transfert à une forme intérieure, le lemme fondamental pondéré est une tautologie et pour $GL(n)$ et le changement de base il a été démontré par Kottwitz (cf. [22]). Dans ces deux cas, le transfert des intégrales orbitales pondérées invariantes est connu depuis les travaux d'Arthur et Clozel (cf. [9]).

Dans le présent article, contrairement à l'approche de Langlands et d'Arthur, on cherche à comprendre le transfert des intégrales orbitales pondérées *non-invariantes* pour le changement de base stable. La situation est la suivante. Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F, $E \subset \overline{F}$ une extension cyclique de F et G' un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F. Soit l un entier non nul. Soit

$$G^* = \mathrm{Res}_{E/F}(G') \times \cdots \times \mathrm{Res}_{E/F}(G'),$$

où le produit contient l fois le facteur $\mathrm{Res}_{E/F}(G')$ qui est la restriction des scalaires à la Weil de E à F du groupe obtenu à partir de G' par extension des scalaires de F à E. Soit θ_0 l'automorphisme de $\mathrm{Res}_{E/F}(G')$ associé à un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. On définit alors un automorphisme θ^* de G^* par

$$\theta^*(x_1, \ldots, x_l) = \big(x_2, \ldots, x_l, \theta_0(x_1)\big)$$

et on peut poser $\mathbf{G}^* = G^* \rtimes \theta^*$. Soit u un cocycle du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ à valeurs dans le quotient $G^*/Z_{G^*}^{\theta^*}$ où $Z_{G^*}^{\theta^*}$ désigne le sous-groupe des points θ^*-fixes du centre Z_{G^*} de G^*. En tordant l'action du groupe de Galois par le cocycle u, on obtient un groupe G et un espace homogène $\mathbf{G}$ sous G qui sont des formes intérieures respectivement du groupe G^* et de l'espace homogène $\mathbf{G}^*$. On suppose que $\mathbf{G}(F) \neq \emptyset$. Alors on a

$$\mathbf{G} = G \rtimes \theta$$

pour un automorphisme θ de G défini sur F et qui est égal, à un automorphisme intérieur près, à θ^*.

Le groupe G' est un groupe endoscopique de $\mathbf{G}$. À tout triplet $(\mathbf{Q}, \mathbf{M}, \delta)$ comme ci-dessus, on sait associer un triplet analogue (Q', M', γ) pour G' tel que γ soit une norme de δ dans le sous-groupe de Lévi M' de G' (on trouvera quelques rappels sur les normes dans la section 5).

Le but de cet article est d'associer à toute fonction f sur $\mathbf{G}(F)$ localement constante et à support compact une fonction analogue f' sur $G'(F)$ de sorte que pour tous triplets associés $(\mathbf{Q},\mathbf{M},\delta)$ et (Q',M',γ), certaines combinaisons linéaires des intégrales orbitales pondérées $J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta,f)$ et $J_{M'}^{Q'}(\gamma,f')$ se correspondent. Les travaux d'Arthur suggèrent qu'a priori des groupes endoscopiques autres que G' doivent apparaître. Comme nous ne voulons pas introduire d'hypothèse sur la validité du lemme fondamental pondéré, on fait une sévère restriction sur le groupe G'. On suppose que le groupe G' est $GL(n)$ ou $SL(n)$ ou de manière légèrement plus générale que G' vérifie les trois hypothèses suivantes :

1. le groupe dérivé de G' est simplement connexe ;
2. le groupe G' est $\mathcal{L}$-stable (au sens de la définition 4.1 de la section 4) ;
3. le centre du groupe dual de G' vérifie l'hypothèse 5.6 du §5.7.

Pour tout sous-espace de Lévi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, on note $\Gamma_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ l'ensemble des classes de $M(F)$-conjugaison des éléments semi-simples G-réguliers de $\mathbf{M}(F)$. De même, pour tout sous-groupe de Lévi M' de G', on définit un ensemble $\Gamma_{G'}(M')$. On définit alors un facteur $\Delta_{M'}$ sur $\Gamma_{G'}(M')^2$ par :

$$\Delta_{M'}(\gamma,\mu)=\begin{cases}1 & \text{si } \gamma \text{ et } \mu \text{ sont conjugués par un élément de } M'(\overline{F})\,;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Lorsque M' correspond à $\mathbf{M}$, on définit un facteur $\Delta_{\mathbf{M}}$ sur $\Gamma_{G'}(M')\times\Gamma_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ par

$$\Delta_{M'}(\gamma,\delta)=\begin{cases}1 & \text{si } \gamma \text{ est une norme de } \delta\,;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On dit qu'un élément $\gamma\in\Gamma_{G'}(M')$ est potentiellement une norme dans M' si γ vérifie une certaine condition cohomologique (cf. la définition 5.2 du §5.5). Tout élément M'-elliptique de $\Gamma_{G'}(M')$ qui est potentiellement une norme dans M' est une norme d'un élément de $\mathbf{G}(F)$ (cf. proposition 5.3 du §5.5). On peut alors définir le transfert.

DÉFINITION. – Soit f et f' des fonctions lisses à support compact respectivement sur $\mathbf{G}(F)$ et $G'(F)$. On dit que f' est un transfert de f si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

– pour tout triplet (P,R,γ) de G', l'expression

$$\sum_{\mu\in\Gamma_{G'}(R)}\Delta_R(\gamma,\mu)J_R^P(\mu,f')$$

est nulle sauf si γ est potentiellement une norme dans M_P, l'unique facteur de Lévi de P qui contient R ;

– pour tous triplets associés $(\mathbf{Q},\mathbf{M},\delta)$ et (Q',M',γ), on a l'égalité

$$\sum_{\delta\in\Gamma_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}\Delta_{\mathbf{M}}(\gamma,\delta)J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta,f)=\sum_{\mu\in\Gamma_{G'}(M')}\Delta_{M'}(\gamma,\mu)J_{M'}^{Q'}(\mu,f').$$

La première condition semble nécessaire pour obtenir des énoncés d'annulation d'intégrales orbitales globales. Cette définition s'inspire de celle introduite par Labesse pour le changement de base de $GL(n)$ (cf. [24] définition III.3.2).

On peut alors énoncer le principal résultat de cet article.

THÉORÈME. – *Supposons que le groupe G' vérifie les conditions* 1 *à* 3 *ci-dessus* (*par exemple* G' *est* $GL(n)$ *ou* $SL(n)$). *Alors, pour toute fonction lisse à support compact sur* $\mathbf{G}(F)$*, il existe une fonction* f' *lisse à support compact sur* $G'(F)$ *qui est un transfert de* f.

Sous une forme proche, ce résultat avait été conjecturé pour $GL(n)$ par Labesse (cf. [24] conjecture III.3.6). Dans [29], Waldspurger a démontré l'existence du transfert des intégrales orbitales ordinaires entre formes intérieures. Labesse dans [25] a déduit du résultat de Waldspurger l'existence du transfert des intégrales orbitales ordinaires pour le changement de base stable. La méthode de Waldspurger consiste à établir des résultats analogues sur l'algèbre de Lie et à les « globaliser » au groupe. Par des méthodes de descente au centralisateur, on ramène la question de l'existence du transfert « non-invariant » à deux problèmes : établir certaines identités au niveau des algèbres de Lie et comparer les poids sur différents groupes. Le premier problème a été résolu dans un article précédent [16], où nous avions étendu certains résultats de Waldspurger (cf. [29]) au cas pondéré. La comparaison des poids repose sur un théorème général sur les (G, M)-familles d'Arthur que Waldspurger nous a expliqué.

L'intérêt du théorème ci-dessus est multiple. Tout d'abord, comme on vient de le voir, sa preuve évite toute analyse difficile du côté spectral de la formule des traces. Ensuite ce théorème rend possible une comparaison directe des formules des traces non invariantes. Il ouvre la voie à une nouvelle approche, purement géométrique, de la stabilisation de la formule des traces. Dans [24], Labesse travaille avec la formule des traces non invariante et il donne une preuve du changement de base pour $GL(n)$ par certains côtés plus simple que celle d'Arthur et Clozel [9].

D'autre part, en caractéristique positive, ce sont les intégrales orbitales pondérées non invariantes et non leurs avatars invariants qui admettent une interprétation géométrique (en termes de comptages de points de variétés sur les corps finis). Ainsi Drinfeld et L. Lafforgue dans leurs travaux sur les chtoucas ont utilisé la formule des traces non-invariante. Les intégrales orbitales pondérées sont donc des objets très « naturels ».

Décrivons brièvement les différentes parties de cet article. Comme nous pensons que nos méthodes s'étendent au cas des espaces tordus au sens de Labesse (i.e. au cas général de la formule des traces tordue), nous avons rédigé une bonne partie de l'article dans ce cadre-là. À la section 1, nous introduisons les principales distributions du côté géométrique de la formule des traces tordues. À la section 2, nous introduisons certaines distributions sur les algèbres de Lie des centralisateurs d'éléments quasi-semi-simples ; ces distributions apparaissent par descente de Harish-Chandra des intégrales orbitales pondérées. Elles vérifient des propriétés familières : intégrabilité de leurs transformées de Fourier et finitude à la Howe. On établit une formule qui relie leurs transformées de Fourier à des fonctions invariantes sur l'algèbre de Lie et aux poids du groupe. La section 3 présente la preuve d'un résultat général sur les (G, M)-familles, dû pour l'essentiel à Waldspurger, qui permet ultérieurement la comparaison des poids. La section 4 définit une certaine classe de groupes auxquels s'appliquera l'existence du transfert. Le reste de l'article se place dans le cadre du changement de base. Dans la section 5, on énonce divers résultats sur les normes. La section 6, en faisant la synthèse entre les résultats d'un précédent article [16] et le théorème de la section 3, établit en quelque sorte « l'existence infinitésimale » du transfert. Cette section, tout comme les résultats de [16], ne s'applique qu'à la classe définie à la section 4. La section 7 contient la définition du transfert ainsi que la preuve de son existence. Enfin, dans la section 8, on montre que notre transfert est bien adapté à une comparaison entre (éventuelles) formules des traces tordues locales.

1. Notations générales

1.1. On appelle, à la suite de Labesse, *espace tordu* un quadruplet $(\mathbf{G}, G, \alpha, \mathrm{Ad}_{\mathbf{G}})$ où $\mathbf{G}$ est un ensemble non vide, G est un groupe, α et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}$ sont des applications

$$\alpha : G \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

et

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \to \mathrm{Aut}(G),$$

où $\mathrm{Aut}(G)$ est le groupe des automorphismes de G ; ces objets doivent en outre vérifier les deux conditions suivantes : l'application α définit une action à gauche de G sur $\mathbf{G}$ qui fait de $\mathbf{G}$ un G-espace principal homogène et l'application $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}$ est G-équivariante au sens où pour tous $x \in G$ et $\delta \in \mathbf{G}$ on a

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}\big(\alpha(x,\delta)\big) = \mathrm{Int}(x) \circ \mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)$$

où Int désigne le morphisme canonique de G dans le groupe des automorphismes intérieurs de G. Par abus, on notera simplement $\mathbf{G}$ un espace tordu ; on dira encore que $\mathbf{G}$ est un G-*espace tordu* et on sous-entendra les applications α et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}$. De façon générale, si $\mathbf{G}$ est un espace tordu, on désigne toujours le groupe sous-jacent par la lettre correspondante en caractère standard, ici G.

Dans la suite, pour $x \in G$ et $\delta \in \mathbf{G}$, on pose simplement

$$x\delta = \alpha(x,\delta)$$

et

$$\delta x = \big[\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)(x)\big]\delta = \alpha\big(\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)(x), \delta\big).$$

On obtient une action à gauche de G sur $\mathbf{G}$ par conjugaison donnée par

$$(x,\delta) \mapsto \mathrm{Ad}(x)(\delta) = x\delta x^{-1}.$$

Si $\mathbf{X}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}$ et H un sous-groupe de G, *le normalisateur de* $\mathbf{X}$ *dans* H est le sous-groupe de H défini par

$$\mathrm{Norm}_H(\mathbf{X}) = \big\{h \in H \mid h\mathbf{X}h^{-1} \subset \mathbf{X}\big\}.$$

Le centralisateur de $\mathbf{X}$ *dans* H est donné par

$$\mathrm{Cent}_H(\mathbf{X}) = \big\{h \in H \mid h\delta h^{-1} = \delta,\ \forall \delta \in \mathbf{X}\big\}.$$

On définit le *centre de* $\mathbf{G}$ par

$$Z_{\mathbf{G}} = \mathrm{Cent}_G(\mathbf{G}),$$

qu'on prendra garde à ne pas confondre avec le centre Z_G de G.

On appellera *sous-espace d'un espace tordu* $\mathbf{G}$ tout sous-ensemble $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ pour lequel il existe un sous-groupe H de G et un élément $\delta \in \mathbf{H}$ tels que

$$\mathbf{H} = H\delta = \{h\delta \mid h \in H\}$$

et le sous-ensemble $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$ de $\mathrm{Aut}(G)$ stabilise H. Un sous-espace d'un espace tordu est alors muni naturellement d'une structure (induite) d'espace tordu.

1.2. Soit F un corps de caractéristique nulle. On appelle *espace tordu algébrique défini sur* F un quadruplet $(\mathbf{G}, G, \alpha, \mathrm{Ad}_{\mathbf{G}})$ comme ci-dessus qui vérifie les conditions supplémentaires suivantes : G est un groupe algébrique et $\mathbf{G}$ est une variété algébrique, $\mathrm{Aut}(G)$ est le groupe des automorphismes du groupe algébrique G, les applications α et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}$ sont des morphismes, tous ces objets sont définis sur F et de plus $\mathbf{G}(F) \neq \emptyset$. Un *sous-espace algébrique* $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ est une sous-variété de $\mathbf{G}$ définie sur F et telle qu'il existe $\delta \in \mathbf{H}(F)$ et un sous-groupe fermé H de G défini sur F qui vérifient les conditions décrites au paragraphe précédent.

Dans la suite, on ne considère que des espaces tordus algébriques définis sur F et on omet souvent l'épithète « algébrique défini sur F ».

1.3. Soit $\mathbf{G}$ un G-espace tordu *réductif connexe* au sens où l'on suppose de plus que G est un groupe réductif connexe. Un *sous-espace parabolique* $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ est par définition un sous-espace de $\mathbf{G}$ tel que le groupe associé P soit un sous-groupe parabolique de G. On appelle facteur de Lévi ou encore sous-espace de Lévi d'un sous-espace parabolique $\mathbf{P}$ un sous-espace $\mathbf{M}$ de $\mathbf{P}$ tel que le groupe M associé soit un sous-groupe de Lévi de P. Le radical unipotent de $\mathbf{P}$ est défini comme le radical unipotent de P et on le note $N_{\mathbf{P}} = N_P$: c'est un sous-groupe de G. On a alors une décomposition de Lévi sous la forme

$$\mathbf{P} = N_P \mathbf{M} = \mathbf{M} N_P.$$

Par abus, on appelle sous-espace de Lévi de $\mathbf{G}$ (vu comme espace réductif et non comme sous-espace parabolique) tout sous-espace de Lévi d'un sous-espace parabolique de $\mathbf{G}$. On fixe $\mathbf{P}_0$ un sous-espace parabolique minimal pour l'inclusion de $\mathbf{G}$ ainsi que $\mathbf{M}_0$ un sous-espace de Lévi de $\mathbf{P}_0$. On montre que P_0 est un sous-groupe parabolique minimal de G. Tout sous-espace parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{M}_0$ admet un unique sous-espace de Lévi $\mathbf{M}_{\mathbf{P}}$ tel que $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_{\mathbf{P}}$. Suivant les notations usuelles d'Arthur, on définit les ensembles finis suivants : si $\mathbf{M}$ est un sous-espace de Lévi de $\mathbf{G}$, $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ désigne l'ensemble des sous-espaces de Lévi de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{M}$, $\mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ l'ensemble des sous-espaces paraboliques de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{M}$ et enfin, si $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}$

$$\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) = \big\{\mathbf{P} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_0) \mid \mathbf{M}_{\mathbf{P}} = \mathbf{M}\big\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet le $\mathbf{G}$ en exposant et on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{M}_0)$, de même pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$.

Soit $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{R} \in \mathcal{F}^{\mathbf{M}_{\mathbf{Q}}}$. On pose

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} N_{\mathbf{Q}} = N_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}. \tag{1.1}$$

On vérifie que $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_{\mathbf{R}})$.

Remarque. – Le groupe G muni de l'action par translation à droite sur lui-même est naturellement un G-espace tordu. Par abus, on note encore G cet espace tordu : on retrouve alors toutes les notations habituelles, par ex. $\mathcal{L}^G$ désigne les sous-groupes de Lévi de G qui contiennent M_0.

1.4. On fixe θ un élément de $\mathrm{Aut}(G)$ qui appartient à l'image de $\mathbf{M}_0(F)$ par $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}$. Cet automorphisme θ est bien défini à un automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(x)$ près, avec $x \in M_0(F)$. On vérifie que les constructions qui suivent ne dépendent pas du choix d'un tel x.

Pour tout groupe algébrique H défini sur F, on note $X^*(H)$ et $X_*(H)$ les groupes, respectivement, des caractères et des cocaractères de H définis sur F. Lorsque le groupe engendré par θ opère sur un ensemble X, on note X^θ le sous-ensemble des points fixes. Si, de plus, X est un groupe abélien, on note X_θ le groupe quotient formé des co-invariants.

Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. On pose alors

$$a_{\mathbf{M}} = \operatorname{Hom}\bigl(X^*(M)^\theta, \mathbb{R}\bigr)$$

et

$$a_{\mathbf{M}}^* = X^*(M)^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Ce sont deux espaces vectoriels réels qui sont naturellement duaux l'un de l'autre. Notons que $a_{\mathbf{M}}^*$ s'identifie à $(a_M^*)^\theta$ et $a_{\mathbf{M}}$ à $(a_M)_\theta$.

On note $A_{\mathbf{M}}$ le tore déployé maximal du centre de $\mathbf{M}$. On définit le groupe de Weyl de $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$ par

$$W^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) = \operatorname{Norm}_{G(F)}(A_{\mathbf{M}}) / \operatorname{Cent}_{G(F)}(A_{\mathbf{M}}).$$

On montre que $\operatorname{Cent}_{G(F)}(A_{\mathbf{M}}) = M(F)$ et que le groupe $W^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ s'identifie au sous-groupe des éléments θ-invariants de $W^G(M)$.

1.5. On conserve les notations du paragraphe précédent. Soit $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. On note $\Sigma(P, M)$ l'ensemble des racines de A_M relativement à son action par adjonction sur l'algèbre de Lie de N_P. On note $\Delta_P^G \subset \Sigma(P, M)$ le sous-ensemble des racines simples. Ces deux ensembles sont finis, munis d'une action naturelle de θ et s'identifient naturellement à des parties de a_M^*. Le cardinal de l'orbite de $\alpha \in \Delta_P^G$ sous l'action de θ est noté l_α. On note $\Delta_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ le sous-ensemble de $a_{\mathbf{M}}^*$ formé des éléments

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l_\alpha} \sum_{k=0}^{l_\alpha - 1} \theta^k(\alpha)$$

lorsque α parcourt Δ_P^G. Cet ensemble $\Delta_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ engendre un sous-espace noté $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$ de $a_{\mathbf{M}}^*$. Observons que $a_{\mathbf{G}}^*$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $a_{\mathbf{M}}^*$ et que nous avons la décomposition

$$a_{\mathbf{M}}^* = \bigl(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}\bigr)^* \oplus a_{\mathbf{G}}^*. \tag{1.2}$$

Dualement, on obtient la décomposition

$$a_{\mathbf{M}} = a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} \oplus a_{\mathbf{G}} \tag{1.3}$$

où l'on a identifié $a_{\mathbf{G}}$ au sous-espace

$$\bigl\{H \in a_{\mathbf{M}} \mid \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in \Delta_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\bigr\}$$

(qui ne dépend pas du choix de $\mathbf{P}$) et où l'on a posé

$$a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \bigl\{H \in a_{\mathbf{M}} \mid \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in a_{\mathbf{G}}^*\bigr\}.$$

Plus généralement, les définitions précédentes et les décompositions (1.2) et (1.3) sont valables lorsqu'on remplace $\mathbf{G}$ par $\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$.

L'automorphisme θ agit sur $a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}$ via un automorphisme d'ordre fini. Par conséquent, on a aussi la décomposition

$$a_M^G = \bigl(a_M^G\bigr)^\theta \oplus (1 - \theta) a_M^G. \tag{1.4}$$

On en déduit que l'application naturelle de $(a_M^G)^\theta$ dans $(a_M^G)_\theta$ est bijective. On obtient alors un isomorphisme naturel entre $(a_M^G)^\theta$ et $a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}$.

Le groupe de Weyl

$$W_0^{\mathbf{G}} = W^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_0)$$

agit naturellement sur $a_{\mathbf{M}_0}$ et on fixe sur cet espace un produit scalaire invariant sous $W_0^{\mathbf{G}}$. On munit alors tout sous-espace de la mesure de Haar qui donne le volume 1 à un hypercube de côté de longueur 1. Si b est un espace vectoriel réel, on note $b_{\mathbb{C}}$ le $\mathbb{C}$-espace obtenu par extension des scalaires.

1.6. Les $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles

Soit $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. Pour tout $\alpha \in \Delta_P^G$, on sait associer une coracine $\alpha^\vee$. On note $\Delta_P^{G,\vee}$ l'ensemble des coracines des éléments de Δ_P^G. Comme au paragraphe précédent, on définit alors un ensemble $\Delta_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G},\vee}$ formé des orbites moyennées des éléments de $\Delta_P^{G,\vee}$. Lorsque le contexte est clair, on omet les G et $\mathbf{G}$ en exposant. On note $\mathbb{Z}(\Delta_{\mathbf{P}}^\vee)$ le réseau de $a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}$ engendré par $\Delta_{\mathbf{P}}^\vee$. On introduit alors la fonction définie pour $\lambda \in a_{\mathbf{M},\mathbb{C}}^*$ par

$$\theta_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = \operatorname{vol}\big(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}/\mathbb{Z}\big(\Delta_{\mathbf{P}}^\vee\big)\big)^{-1} \prod_{\alpha^\vee \in \Delta_{\mathbf{P}}^\vee} \lambda\big(\alpha^\vee\big).$$

Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. On appelle hyperplan radiciel tout hyperplan de $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$ défini par un élément de $\Delta_{\mathbf{P}}^\vee$ pour $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$. Les composantes connexes de $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$ privé des hyperplans radiciels correspondent bijectivement aux chambres associées à $\Delta_{\mathbf{P}}^\vee$ quand $\mathbf{P}$ parcourt $\mathcal{P}(\mathbf{M})$. Suivant Arthur (cf. [1] p. 36, [3] p. 229), on appelle $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille toute famille $c = (c_{\mathbf{P}})_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$ de fonctions sur $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})_{\mathbb{C}}^*$ lisses sur un voisinage de 0 dans $i(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$ telles que pour tous $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$ de $\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ adjacents, au sens où les chambres de $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$ associées à $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$ ont un mur en commun, les fonctions $c_{\mathbf{P}}$ et $c_{\mathbf{P}'}$ coïncident au voisinage de 0 sur l'hyperplan radiciel qui porte ce mur commun. On définit alors une fonction sur $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})_{\mathbb{C}}^*$, lisse au voisinage de 0 dans $i(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$, par

$$c_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})} c_{\mathbf{P}}(\lambda) \theta_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda)^{-1}.$$

On pose $c_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = c_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(0)$. Pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, resp. tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, on sait associer à une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille c une $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$-famille, resp. une $(\mathbf{M}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{M})$-famille (les constructions sont calquées sur [1] pp. 37–38) et, en combinant les deux procédés, une $(\mathbf{M}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{L})$-famille notée $c_{\mathbf{L},\mathbf{Q}}$ si, de plus, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$. On pose

$$c_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}} = (c_{\mathbf{L},\mathbf{Q}})_{\mathbf{L}}^{\mathbf{M}_{\mathbf{Q}}} = (c_{\mathbf{L},\mathbf{Q}})_{\mathbf{L}}^{\mathbf{M}_{\mathbf{Q}}}(0).$$

Pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, on note $c'_{\mathbf{Q}}(\lambda)$ la fonction de la variable $\lambda \in a_{\mathbf{M},\mathbb{C}}^*$ définie à partir d'une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille c par l'analogue évident de la formule (6.3) p. 33 de [1]. Cette fonction est lisse dans un voisinage de 0 de $ia_{\mathbf{M}}^*$ (*ibid.* lemme 6.1) et on note $c'_{\mathbf{Q}}$ sa valeur en 0.

1.7. Supposons de plus que F est un corps local muni de sa valeur absolue usuelle $|.|_F$. On définit une application

$$H_G : G(F) \to a_G$$

définie par $\chi(H_G(x)) = \log(|\chi(x)|_F)$ pour tout $x \in G(F)$ et $\chi \in X(G)_F$. On note $H_{\mathbf{G}}$ l'application obtenue en composant H_G avec la projection canonique $a_G \to a_{\mathbf{G}}$. Fixons un sous-groupe compact maximal « en bonne position » par rapport à M_0. Si F est non-archimédien, cela signifie que K est le stabilisateur dans $G(F)$ d'un sommet spécial dans l'appartement associé à A_{M_0} dans l'immeuble de Bruhat–Tits de G. Pour tout $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_0)$, on étend de la manière usuelle la fonction $H_{\mathbf{M_P}}$ en une fonction

$$H_{\mathbf{P}} : G(F) \to a_{\mathbf{M_P}}$$

en utilisant la décomposition d'Iwasawa $G(F) = N_P(F)M_P(F)K$. On note $\mathbb{C}[G(F)]$ l'algèbre du groupe $G(F)$. On identifie canoniquement $G(F)$ à un sous-ensemble de cette algèbre. Soit $g \in \mathbb{C}[G(F)]$; cet élément s'écrit comme une combinaison linéaire formelle

$$g = \sum_{x \in G(F)} \alpha_g(x) x$$

où α_g est une application presque nulle de $G(F)$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. On définit alors une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille $v(g) = (v_{\mathbf{P}}(g))_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$ en posant pour tous $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\lambda \in a^*_{\mathbf{M},\mathbb{C}}$

$$v_{\mathbf{P}}(\lambda, g) = \sum_{x \in G(F)} \alpha_g(x) \exp\bigl(-\lambda\bigl(H_{\mathbf{P}}(x)\bigr)\bigr). \tag{1.5}$$

1.8. La composante neutre du centralisateur de δ dans G est notée G_δ et appelée le centralisateur connexe. On dit que δ est *quasi-semi-simple* si $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)$ préserve une paire de Borel qui est, par définition, une paire (B, T) constituée d'un sous-groupe de Borel de G et d'un sous-tore maximal T de B (on n'exige pas qu'elle soit définie sur F). Cela revient à dire que $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)$ induit un automorphisme semi-simple sur le groupe dérivé de G. Si δ est quasi-semi-simple, alors G_δ est un groupe réductif (cf. [27] corollaire 9.4). On dit qu'un élément quasi-semi-simple δ est régulier si G_δ est un tore.

On note par une lettre gothique minuscule l'algèbre de Lie du groupe correspondant, par ex. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{g}_\delta = \mathrm{Lie}(G_\delta)$ pour $\delta \in \mathbf{G}$ quasi-semi-simple régulier. Soit $\delta \in \mathbf{G}$. L'automorphisme de $\mathfrak{g}$ dérivé de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)$ est encore noté $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)$. On définit le discriminant de Weyl de δ par

$$D^{\mathbf{G}}(\delta) = \det\bigl(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}_{\mathbf{G}}(\delta)|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\delta\bigr).$$

1.9. Intégrales orbitales pondérées

On note $C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$ l'espace des fonctions complexes, lisses et à support compact sur $\mathbf{G}(F)$. Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $f \in C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$ et $\delta \in \mathbf{M}(F)$ quasi-semi-simple régulier. On définit alors une intégrale orbitale pondérée par la formule suivante

$$J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta, f) = \bigl|D^{\mathbf{G}}(\delta)\bigr|_F^{1/2} \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f\bigl(x^{-1}\delta x\bigr) v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(x)\, dx.$$

On a choisi implicitement des mesures de Haar sur les groupes $G(F)$ et $G_\delta(F)$. L'intégrale est convergente.

2. Intégrales orbitales pondérées sur les algèbres de Lie et leurs transformées de Fourier

2.1. On suppose désormais que F est un corps local non-archimédien de caractéristique nulle. On fixe H un groupe réductif connexe et défini sur F. Rappelons qu'on note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H. On fixe M_0^H un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique minimal de H ainsi qu'un sous-groupe compact maximal K^H de $H(F)$ en bonne position par rapport à M_0^H. On note $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ l'ouvert de $\mathfrak{h}$ formé des éléments semi-simples réguliers i.e. ceux dont le centralisateur dans H est un tore maximal. On dit qu'un sous-F-tore maximal T de H est elliptique si le sous-tore déployé maximal A_T de T est égal à A_H. On note $\mathfrak{h}_{\mathrm{ell}}(F)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$ formé d'éléments elliptiques i.e. ceux dont le centralisateur dans H est un tore elliptique. Soit $M \in \mathcal{L}^H$. On note $\Gamma_H(\mathfrak{m})$, resp. $\Gamma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{m})$ l'ensemble des orbites de $\mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$, resp. de $\mathfrak{m}_{\mathrm{ell}}(F) \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$, sous l'action par adjonction de $M(F)$. On pose $\Gamma(\mathfrak{h}) = \Gamma_H(\mathfrak{h})$. Par abus, on identifiera souvent ces ensembles à un système de représentants.

2.2. On fixe des mesures de Haar sur les sous-groupes de $H(F)$ qu'on considère. Pour $P \in \mathcal{F}^H$, on choisit les mesures de Haar sur $N_P(F)$ et $M_P(F)$ de sorte qu'on ait les formules d'intégration habituelles (cf. les choix de la section 2 de [16]). Via une exponentielle on en déduit des mesures de Haar sur les algèbres de Lie correspondantes.

On fixe un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ continu et non trivial ainsi qu'une forme bilinéaire $\langle .,. \rangle$ sur $\mathfrak{h}(F)$, symétrique, non dégénérée et invariante par adjonction. Les sous-espaces de $\mathfrak{h}(F)$, pour lesquels la restriction de la forme précédente est non dégénérée, sont alors munis de la manière habituelle d'une transformée de Fourier normalisée par la condition $\hat{\hat{f}}(X) = f(-X)$ pour une fonction f de la variable X.

On munit $\Gamma(\mathfrak{h})$ de la mesure suivante : pour toute fonction $\alpha \in C_c^\infty(\Gamma(\mathfrak{h}))$, on pose

$$\int_{\Gamma(\mathfrak{h})} \alpha(X)\, dX = \sum_{M \in \mathcal{L}^H} \frac{|W_0^M|}{|W_0^H|} \sum_{T \in \mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(M)} \left|W(M,T)\right|^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)} \alpha(Z)\, dZ,$$

où $\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(M)$ désigne un système de représentants des classes de $M(F)$-conjugaison de sous-tores maximaux elliptiques de M et

$$W(M,T) = \mathrm{Norm}_{M(F)}(T)/T(F)$$

est le groupe de Weyl de (M,T).

2.3. Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$, $M \in \mathcal{L}^H$ et $Q \in \mathcal{F}^H(M)$. Pour $X \in \Gamma_H(\mathfrak{m})$, on définit l'intégrale orbitale pondérée

$$J_M^Q(X,f) = \left|D^{\mathfrak{h}}(X)\right|_F^{1/2} \int_{T_X(F)\backslash H(F)} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big) v_M^Q(x)\, dx,$$

où T_X est le centralisateur de X dans H (c'est un sous-tore maximal de M),

$$D^{\mathfrak{h}}(X) = \det(\mathrm{ad}\, X | \mathfrak{h}/\mathfrak{t}_X)$$

est le discriminant de Weyl et $v_M^Q(x)$ est le poids obtenu à partir de la (H,M)-famille $v(x)$ définie au § 1.7. On définit par dualité la transformée de Fourier $\widehat{D}$ d'une distribution D.

Généralisant un résultat d'Harish-Chandra, Waldspurger a montré que la distribution $\hat{J}_M^H(X,.)$ est localement intégrable : il existe une fonction

$$\hat{j}_M^H : \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{h}_{\text{reg}} \times \mathfrak{h}_{\text{reg}}(F) \to \mathbb{C}$$

localement constante telle que pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$

$$\hat{J}_M^H(X,f) = \int_{\mathfrak{h}(F)} \left|D^{\mathfrak{h}}(Z)\right|_F^{-1/2} f(Z) \hat{j}_M^H(X,Z)\, dZ \tag{2.1}$$

(cf. [28] proposition V.10). Waldspurger a construit selon une procédure introduite par Arthur des avatars invariants I_M^L des intégrales J_M^L, où $L \in \mathcal{L}^H(M)$ (cf. [28] VI.I). On dispose en outre d'une fonction

$$\hat{i}_M^H : \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{h}_{\text{reg}} \times \mathfrak{h}_{\text{reg}}(F) \to \mathbb{C}$$

localement constante et invariante par conjugaison par $W^H(M) \times H(F)$ telle que pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ et tout $X \in \mathfrak{m}_{\text{reg}}(F) \cap \mathfrak{h}_{\text{reg}}$, on ait l'égalité

$$I_M^H(X, \hat{f}) = \int_{\Gamma(\mathfrak{g})} J_H^H(Z,f) \hat{i}_M^H(X,Z)\, dZ. \tag{2.2}$$

Par la formule d'intégration de Weyl, on obtient une expression analogue à celle de la ligne (2.1). Les distributions $\hat{J}_M^H$ et $\hat{I}_M^H$ sont reliées par la formule

$$\hat{J}_M^H(X,f) = \sum_{L \in \mathcal{L}^H(M)} \operatorname{Ind-p}_L^H\big(\hat{I}_M^L(X,.)\big)(f), \tag{2.3}$$

où l'on définit une « induite pondérée » pour toute distribution d invariante sur L, localement intégrable et associée à une fonction e_d—ici il convient de mettre des conditions de croissance sur cette fonction, cf. [28] V.6 et V.9—par la formule

$$\operatorname{Ind-p}_L^H(d)(f) = \int_{\Gamma_H(\mathfrak{l})} J_L^H(Z,f) e_d(Z)\, dZ. \tag{2.4}$$

Précisons enfin que la fonction $\hat{j}_M^H$ ne dépend pas du choix de la mesure sur $G(F)$. Par contre, elle dépend du choix des mesures sur $a_{M_0^H}$ et les sous-tores maximaux qui apparaissent, du choix de K et du bicaractère $\psi(.,.)$. La fonction $\hat{i}_M^H$ a la même dépendance excepté qu'elle ne dépend pas de K.

2.4. Dans la suite, on généralise les résultats précédents à des distributions qui apparaissent par « descente au centralisateur ». Soient $\mathbf{G}$ un G-espace tordu (réductif, connexe) et $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. Soit $\delta \in \mathbf{M}(F)$ quasi-semi-simple. On fait les hypothèses suivantes sur δ : on suppose que δ est *elliptique* dans $\mathbf{M}$ au sens où $A_{M_\delta} = A_{\mathbf{M}}$; on suppose aussi qu'il existe $\mathbf{M}_1 \in \mathcal{L}^{\mathbf{M}}(\mathbf{M}_0)$ tel que $\delta \in \mathbf{M}_1(F)$ et tel que la classe de $M_1(F)$-conjugaison de δ ne rencontre aucun sous-espace de Lévi propre de $\mathbf{M}_1$. Si l'on part d'un élément $\delta \in \mathbf{M}(F)$ quelconque, cette hypothèse est vérifiée pour au moins un $M(F)$-conjugué de δ. Remarquons qu'alors δ est elliptique dans $\mathbf{M}_1$ et que $M_{1,\delta}$ est un sous-groupe de Lévi minimal de G_δ. Puisque $A_{M_{1,\delta}} = A_{\mathbf{M}_1}$, on a un isomorphisme naturel $a_{M_{1,\delta}} \simeq a^{\theta}_{M_1}$ et donc une injection $a^{G_\delta}_{M_{1,\delta}} \to (a^{G}_{M_1})^{\theta}$. En composant par l'isomorphisme $(a^{G}_{M_1})^{\theta} \to (a^{G}_{M_1})_{\theta} = a^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}_1}$, on obtient une injection $a^{G_\delta}_{M_{1,\delta}} \to a^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}_1}$. On munit alors $a^{G_\delta}_{M_{1,\delta}}$ du produit scalaire induit par $a^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}_1}$. Posons $H = G_\delta$ et $M^H_0 = M_{1,\delta}$. Alors $M_\delta \in \mathcal{L}^H = \mathcal{L}^H(M^H_0)$. On a de plus une bijection entre

$$\big\{\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \mid A_{L_\delta} = A_{\mathbf{L}}\big\} \tag{2.5}$$

et $\mathcal{L}^H(M_\delta)$ donnée par $\mathbf{L} \mapsto L_\delta$. En particulier, on notera souvent L_δ un élément de $\mathcal{L}^H(M_\delta)$ en sous-entendant que L_δ est l'image par cette bijection de l'élément noté $\mathbf{L}$ de l'ensemble (2.5).

Soient $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $g \in \mathbb{C}[G(F)]$ et $X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)$. On considère la distribution suivante

$$J^{\mathbf{Q},g}_{\mathbf{M},\delta}(X,f) = \big|D^{\mathfrak{h}}(X)\big|^{1/2}_F \int\limits_{T_X(F)\backslash H(F)} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big) v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}(xg)\, dx,$$

définie pour $f \in C^\infty_c(\mathfrak{h}(F))$. Dans le reste de cette partie, les éléments δ et g sont fixés. Pour alléger les notations, on note simplement $J^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}$ au lieu de $J^{\mathbf{Q},g}_{\mathbf{M},\delta}$.

Généralisant la définition (2.4), on pose pour toute distribution d invariante sur $L_\delta \in \mathcal{L}^H$ associée à une fonction e_d

$$\mathrm{Ind}\text{-}\mathrm{p}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(d)(f) = \int\limits_{\Gamma_H(\mathfrak{l}_\delta)} J^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(Z,f) e_d(Z)\, dZ, \tag{2.6}$$

pour toute $f \in C^\infty_c(\mathfrak{h}(F))$.

Proposition 2.1. – *Pour toute fonction $f \in C^\infty_c(\mathfrak{h}(F))$, on a*

$$\hat{J}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}(X,f) = \sum_{L_\delta \in \mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)} \mathrm{Ind}\text{-}\mathrm{p}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}\big(\hat{I}^{L_\delta}_{M_\delta}(X,.)\big)(f).$$

Preuve. – Nous allons relier les distributions $J^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}$ aux intégrales orbitales pondérées sur H définies au paragraphe précédent. Nous pourrons ensuite appliquer les résultats de Waldspurger. Par linéarité, on peut et on va supposer que $g \in G(F)$. Tout revient à relier les poids $v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}(xg)$, pour $x \in H(F)$, à des poids sur le groupe H. Cela est possible grâce à des résultats d'Arthur (cf. [3] lemme 8.3 p. 264). Mais comme nous sommes dans une situation légèrement plus générale, nous allons revoir les techniques d'Arthur.

Soit $x \in H(F)$. Le poids $v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}(xg)$ est obtenu à partir de la $(\mathbf{M_Q}, \mathbf{M})$-famille définie pour tout $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M})$ et $\lambda \in ia^*_{\mathbf{M}}$ par

$$v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{P}}(\lambda, xg) = \exp\big(-\lambda\big(H_{\mathbf{Q_P}}(xg)\big)\big), \tag{2.7}$$

où $\mathbf{Q_P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ est défini à la ligne (1.1) du §1.3.

On introduit alors les $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles suivantes définies pour $\mathbf{P}' \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\lambda \in ia^*_{\mathbf{M}}$ par

$$v_{\mathbf{P}'}(\lambda, \delta, x) = \exp\big(-\lambda\big(H_{P'_\delta}(x)\big)\big), \tag{2.8}$$

et

$$u_{\mathbf{P}'}(\lambda, x, g) = \exp\big(-\lambda\big(H_{\mathbf{P}'}\big(k_{P'_\delta}(x)g\big)\big)\big), \tag{2.9}$$

où $k_{P'_\delta}(x)$ est un élément de K^H tel que $xk_{P'_\delta}(x)^{-1}$ appartienne à P'_δ. La ligne (2.7) peut alors s'écrire

$$v_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}}(\lambda, xg) = v_{\mathbf{QP}}(\lambda, \delta, x)\, u_{\mathbf{QP}}(\lambda, x, g). \tag{2.10}$$

En utilisant la formule pour le produit de deux $(\mathbf{M_Q}, \mathbf{M})$-familles (cf. [1] lemme 6.3), nous obtenons que

$$v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(xg) = \sum_{\mathbf{R}\in\mathcal{F}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M})} \big(v^{\mathbf{Q}}\big)_{\mathbf{M}}^{\mathbf{R}}(\delta, x)\big(u^{\mathbf{Q}}\big)'_{\mathbf{R}}(x, g), \tag{2.11}$$

où l'on note $v^{\mathbf{Q}}(\delta, x)$ et $u^{\mathbf{Q}}(x, g)$ les $(\mathbf{M_Q}, \mathbf{M})$-familles déduites des $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles définies aux lignes (2.8) et (2.9). Conformément aux notations du §1.6, le complexe $(u^{\mathbf{Q}})'_{\mathbf{R}}(x, g)$ est associé à la $(\mathbf{M_Q}, \mathbf{M})$-famille $u^{\mathbf{Q}}(x, g)$ et au sous-espace parabolique $\mathbf{R} \in \mathcal{F}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M})$. On remarquera qu'il est invariant par translation à gauche de la variable x par un élément de $Q_R(F)$ (où comme d'habitude Q_R est le groupe associé à l'espace tordu $\mathbf{Q_R}$). Considérons un instant $\mathbf{R} \in \mathcal{F}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M})$ et posons provisoirement $S = R_\delta$. Écrivons $x = m_S n_S n'_S k_S$ suivant la décomposition

$$H(F) = M_S(F)N_S(F)N_{Q,\delta}(F)K^H.$$

On vérifie que

$$\big(v^{\mathbf{Q}}\big)_{\mathbf{M}}^{\mathbf{R}}(\delta, x) = v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M_R}}(\delta, m_S)$$

et

$$\big(u^{\mathbf{Q}}\big)'_{\mathbf{R}}(x, g) = \big(u^{\mathbf{Q}}\big)'_{\mathbf{R}}(k_S, g).$$

D'après une variante de [3] lemme 8.3, on a

$$v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M_R}}(\delta, m_S) = \begin{cases} v_{M_\delta}^{M_S}(m_S) & \text{si } a_{M_S} = a_{\mathbf{M_R}}.\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Maintenant S est un élément quelconque de $\mathcal{F}^{Q_\delta}(M_\delta)$; on pose

$$\big(u^{Q}\big)'_{S}(x, g) = \sum_{\{\mathbf{R}\in\mathcal{F}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M});\ R_\delta = S,\ a_{\mathbf{M_R}} = a_{M_S}\}} \big(u^{\mathbf{Q}}\big)'_{\mathbf{R}}(x, g).$$

On a alors

$$v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(xg) = \sum_{S\in\mathcal{F}^{Q_\delta}(M_\delta)} v_{M_\delta}^{M_S}(m_S)\big(u^{Q}\big)'_{S}(k_S, g). \tag{2.12}$$

On en déduit à l'aide d'un changement de variables standard que

$$J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X, f) = \sum_{S\in\mathcal{F}^{Q_\delta}(M_\delta)} J_{M_\delta}^{M_S}(X, f_{S,g}), \tag{2.13}$$

où l'on a posé, pour tout $Y \in \mathfrak{m}_S(F)$

$$f_{S,g}(Y) = \int_{K^H} \int_{\mathfrak{n}_{Q_\delta}(F)+\mathfrak{n}_S(F)} f\big(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(Y+N)\big)\big(u^{Q}\big)'_{S}(k, g)\, dN\, dk. \tag{2.14}$$

On vérifie que $\hat{f}_{S,g}=\widehat{f_{S,g}}$. On en déduit à l'aide des lignes (2.13) et (2.3) que

$$\begin{aligned}J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X,\hat{f})&=\sum_{S\in\mathcal{F}^{Q_\delta}(M_\delta)}J_{M_\delta}^{M_S}(X,\widehat{f_{S,g}})\\&=\sum_{S\in\mathcal{F}^{Q_\delta}(M_\delta)}\sum_{L_\delta\in\mathcal{L}^{M_S}(M_\delta)}\operatorname{Ind-p}_{L_\delta}^{M_S}\big(\hat{I}_{M_\delta}^{L_\delta}(X,.)\big)(f_{S,g})\\&=\sum_{L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)}\sum_{S\in\mathcal{F}^{Q_\delta}(L_\delta)}\operatorname{Ind-p}_{L_\delta}^{M_S}\big(\hat{I}_{M_\delta}^{L_\delta}(X,.)\big)(f_{S,g}).\end{aligned}$$

D'après l'égalité (2.13), pour toute distribution d localement intégrable et invariante sur L_δ, nous avons

$$\sum_{S\in\mathcal{F}^{Q_\delta}(L_\delta)}\operatorname{Ind-p}_{L_\delta}^{M_S}(d)(f_{S,g})=\operatorname{Ind-p}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}}(d)(f),$$

où $\mathbf{L}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ est l'élément qui correspond à L_δ (cf. l. (2.5)). D'où le lemme. □

COROLLAIRE 2.2. – *Il existe une fonction*

$$\hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}:\Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)\times\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)\to\mathbb{C}$$

localement constante telle que pour toute fonction $f\in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$,

$$\hat{J}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X,f)=\int_{\mathfrak{h}(F)}\big|D^{\mathfrak{h}}(Z)\big|_F^{-1/2}f(Z)\hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X,Z)\,dZ.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X,Z)=&\sum_{L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)}\sum_{L_1\in\mathcal{L}^{L_\delta}}\big|W_0^{L_1}\big|\big|W_0^{L_\delta}\big|^{-1}\\&\sum_{T\in\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_1)}\big|W(L_1,T)\big|^{-1}\sum_{\{x\in T(F)\backslash H(F);\ (\operatorname{Ad}x)Z\in\mathfrak{t}(F)\}}v_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}}(xg)\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X,(\operatorname{Ad}x)Z\big).\end{aligned}$$

Preuve. – Soit $L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)$. En utilisant la proposition 2.1, la définition de la ligne (2.6) et de la mesure sur $\Gamma(\mathfrak{l}_\delta)$, on voit qu'il suffit de prouver que la distribution d définie par

$$\begin{aligned}d(f)&=\int_{\mathfrak{t}(F)}J_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}}(Z,f)\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}(X,Z)\,dZ\\&=\int_{\mathfrak{t}(F)}\int_{T(F)\backslash H(F)}\big|D^{\mathfrak{h}}(Z)\big|_F^{1/2}f\big((\operatorname{Ad}x^{-1})Z\big)v_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}}(xg)\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}(X,Z)\,dx\,dZ\end{aligned}$$

est égale à celle définie par

$$f\mapsto\int_{\mathfrak{h}(F)}\big|D^{\mathfrak{h}}(Z)\big|^{-1/2}f(Z)e(Z)\,dZ,$$

avec

$$e(Z)=\sum_{\{x\in T(F)\backslash G(F);\ (\operatorname{Ad}x)Z\in\mathfrak{t}(F)\}}v_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}}(xg)\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X,(\operatorname{Ad}x)Z\big).$$

Cela se déduit de la preuve du lemme V.7 de [28]. □

2.5. Dans ce paragraphe, on se place sous les hypothèses du paragraphe précédent. Pour tous sous-groupes de Lévi L_0 et $L_1 \in \mathcal{L}^H$, on pose

$$\mathrm{Tran}_H(L_0, L_1) = \{w \in W_0^{L_1} \backslash W_0^H; wL_0w^{-1} \subset L_1\}. \tag{2.15}$$

Pour $w \in \mathrm{Tran}_H(L_0, L_1)$ et $\mathbf{L}$ l'élément de l'ensemble (2.5) tel que $L_\delta = L_1$, on pose

$$\mathbf{L}^w = w^{-1}\mathbf{L}w\ ;$$

cela définit un élément de $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. Si de plus $L_1 \in \mathcal{L}^{M_{Q,\delta}}$, on pose

$$\mathbf{Q}^w = w^{-1}\mathbf{Q}w\ ;$$

c'est un élément de $\mathcal{F}^{\mathbf{G}}$.

PROPOSITION 2.3. – *Soient $L_0 \in \mathcal{L}^H$, $Z \in \mathfrak{l}_{0,\mathrm{ell}}(F)$ et $z \in H(F)$. Pour tout $X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)$, on a*

$$\hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}\big(X, (\mathrm{Ad}\, z^{-1})Z\big) = \sum_{L_\delta \in \mathcal{L}^{M_{Q,\delta}}(M_\delta)} \sum_{w \in \mathrm{Tran}_H(L_0, L_\delta)} v_{\mathbf{L}^w}^{\mathbf{Q}^w}(zg)\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X, (\mathrm{Ad}\, w)Z\big).$$

En particulier, la fonction $Z \mapsto \hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X, (\mathrm{Ad}\, z^{-1})Z)$ ne dépend que de l'image de Z dans $\Gamma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{l}_0)$.

Preuve. – L'expression donnée par le corollaire 2.2 s'écrit après un changement de variable

(2.16)
$$\hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}\big(X, (\mathrm{Ad}\, z^{-1})Z\big) = \sum_{L_\delta \in \mathcal{L}^{M_{Q\delta}}(M_\delta)} \sum_{L_1 \in \mathcal{L}^{L_\delta}} |W_0^{L_1}||W_0^{L_\delta}|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_1)} |W(L_1, T)|^{-1}$$
$$\sum_{\{x \in T(F)\backslash H(F);\ (\mathrm{Ad}\, x)Z \in \mathfrak{t}(F)\}} v_{\mathbf{L}}^{\mathbf{Q}}(xzg)\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X, (\mathrm{Ad}\, x)Z\big).$$

Soit $L_1 \in \mathcal{L}^{L_\delta}$ qui a une contribution non nulle à la somme ci-dessus. Dans ce cas, il existe $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_1)$ et $x \in T(F)\backslash H(F)$ tels que $(\mathrm{Ad}\, x)Z \in \mathfrak{t}(F)$. On en déduit l'égalité de tores $xT_Zx^{-1} = T$ puis, en prenant les sous-tores déployés maximaux, l'égalité $xA_{L_0}x^{-1} = A_{L_1}$ et donc $xL_0x^{-1} = L_1$. Comme $A_{L_1} \subset A_{M_0^H}$, on voit que $x^{-1}A_{M_0^H}x$ est un sous-tore (déployé maximal) de L_0 donc il est $L_0(F)$-conjugué à $A_{M_0^H}$. Par conséquent, $x \in \mathrm{Norm}_{H(F)}(A_{M_0^H})L_0(F)$. Dans l'expression (2.16) ci-dessus, on peut donc remplacer la somme sur $L_1 \in \mathcal{L}^{L_\delta}$ par la somme sur $n_1L_0n_1^{-1}$ lorsque n_1 parcourt

$$\{n_1 \in \mathrm{Norm}_{H(F)}(M_0^H)/\mathrm{stab}_{\mathrm{Norm}_{H(F)}(M_0^H)}(L_0) \mid n_1L_0n_1^{-1} \subset L_\delta\}. \tag{2.17}$$

Fixons $n_1 \in \mathrm{Norm}_{H(F)}(M_0^H)$ tel que $L_1 = n_1L_0n_1^{-1}$ soit inclus dans L_δ. On peut alors prendre

$$\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_1) = \{n_1Tn_1^{-1};\ T \in \mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_0)\}. \tag{2.18}$$

Dans l'expression (2.16), on peut restreindre la somme sur $\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_1)$ aux tores qui sont $H(F)$-conjugués à T_Z. Considérons le système suivant de représentants des classes de

$L_0(F)$-conjugaison des tores de L_0 qui sont $H(F)$-conjugués à T_Z

$$\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_0,T_Z)=\bigl\{nT_Zn^{-1};n\in L_0(F)\backslash\operatorname{Norm}_{H(F)}(L_0)/\operatorname{Norm}_{H(F)}(T_Z)\bigr\}. \tag{2.19}$$

Dans (2.16), on restreint la troisième somme aux $T\in n_1\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(L_0,T_Z)n_1^{-1}$. Un tel tore s'écrit $T=n_1nT_Z(n_1n)^{-1}$ avec $n\in\operatorname{Norm}_{H(F)}(L_0)$ et on a les égalités

$$\bigl\{x\in T(F)\backslash H(F);(\operatorname{Ad}x)Z\in\mathfrak{t}(F)\bigr\}=W(H,T)n_1n=n_1nW(H,T_Z). \tag{2.20}$$

Ainsi, en tenant compte des égalités $|W_0^{L_1}|=|W_0^{L_0}|$ et $|W(H,T)|=|W(H,T_Z)|$, on obtient

$$\hat{j}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{M}}\bigl(X,\bigl(\operatorname{Ad}z^{-1}\bigr)Z\bigr)=\sum_{L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)}\bigl|W_0^{L_0}\bigr|\bigl|W_0^{L_\delta}\bigr|^{-1}\sum_{n_1}\sum_{n}\bigl|W(L_0,T_Z)\bigr|^{-1}\sum_{x\in W(H,T_Z)}v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(n_1nxzg)\hat{i}^{L_\delta}_{M_\delta}\bigl(X,(\operatorname{Ad}n_1nx)Z\bigr), \tag{2.21}$$

où la somme sur n_1 est prise sur l'ensemble (2.17) et celle sur n est prise sur l'ensemble des doubles classes $L_0(F)\backslash\operatorname{Norm}_{H(F)}(L_0)/\operatorname{Norm}_{H(F)}(T_Z)$. Ce dernier ensemble s'identifie au quotient de $W^H(L_0)$ par $W(H,T_Z)/W(L_0,T_Z)$. En tenant compte des bijections naturelles

$$\operatorname{Norm}_{H(F)}\bigl(M_0^H\bigr)/\operatorname{stab}_{\operatorname{Norm}_{H(F)}(M_0^H)}(L_0)\simeq\bigl[W_0^H/W_0^{L_0}\bigr]/\operatorname{stab}_{W_0^H/W_0^{L_0}}(L_0),$$

et

$$W^H(L_0)\simeq\operatorname{stab}_{W_0^H/W_0^{L_0}}(L_0)$$

nous voyons que dans (2.21), les trois dernières sommes se fondent en une seule de sorte que $\hat{j}^Q_{M,g}(X,(\operatorname{Ad}z^{-1})Z)$ est égale à

$$\sum_{L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)}\bigl|W_0^{L_0}\bigr|\bigl|W_0^{L_\delta}\bigr|^{-1}\sum_{\{n_1\in W_0^H/W_0^{L_0};\ n_1L_0n_1^{-1}\subset L_\delta\}}v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(n_1zg)\hat{i}^{L_\delta}_{M_\delta}\bigl(X,(\operatorname{Ad}n_1)Z\bigr). \tag{2.22}$$

Soient $L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)$ et $w\in\operatorname{Tran}_H(L_0,L_\delta)$. D'après le lemme suivant, on a

$$v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(wzg)=v^{\mathbf{Q}^w}_{\mathbf{L}^w}(zg).$$

Cela donne la première assertion du lemme. Quant à la seconde, c'est une conséquence immédiate du fait que la fonction $z\mapsto v^{\mathbf{Q}^w}_{\mathbf{L}^w}(zg)$ est invariante par translation à gauche par un élément de $L_0(F)$. $\square$

LEMME 2.4. – *Soient $L_\delta\in\mathcal{L}^{M_{Q_\delta}}(M_\delta)$ et $w\in\operatorname{Tran}_H(L_0,L_\delta)$. On a*

$$v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(wg)=v^{\mathbf{Q}^w}_{\mathbf{L}^w}(g)$$

pour tout $g\in\mathbb{C}[G(F)]$.

Preuve. – Par linéarité, on peut supposer que $g\in G(F)$. Le nombre complexe $v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}(wg)$ est obtenu à partir de la $(\mathbf{M}_{\mathbf{Q}},\mathbf{L})$-famille $v^{\mathbf{Q}}$ définie par

$$v^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(\lambda,wg)=\exp\bigl(-\lambda\bigl(H_{\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}}(wg)\bigr)\bigr)$$

pour $\mathbf{R}\in\mathcal{P}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{L})$ et $\lambda\in ia_{\mathbf{L}}^*$. Écrivons $wg=lnk$ d'après la décomposition d'Iwasawa

$$G(F)=L(F)N_{Q_R}(F)K^G$$

où K^G est le sous-groupe compact maximal fixé de $G(F)$. Par définition, on a

$$H_{\mathbf{Q_R}}(wg)=H_{\mathbf{L}}(l). \tag{2.22}$$

Fixons un représentant, encore noté w, de w dans $\mathrm{Norm}_{H(F)}(M_0^H)$. Rappelons que $M_0^H=M_{1,\delta}$ avec $\mathbf{M}_1\in\mathcal{L}^{\mathbf{M}}$. Par conséquent, w est aussi un élément de $\mathrm{Norm}_{G(F)}(M_1(F))$. À ce titre, il appartient à $M_1(F)K^G$ donc à $L(F)K$: on pose $w=l_1k_1$ avec des notations évidentes. On a donc

$$g=\big(k_1^{-1}l_1^{-1}lk_1\big)\big(k_1^{-1}nk_1\big)\big(k_1^{-1}k\big);$$

et les facteurs entre parenthèses appartiennent respectivement à $w^{-1}Lw$, $w^{-1}N_{Q_R}w$ et K. Par conséquent, avec $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}^w=w^{-1}\mathbf{Q_R}w$ et $\mathbf{R}^w=w^{-1}\mathbf{R}w$, on obtient

$$\begin{aligned} w.H_{\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}^w}(g)&=w.H_{\mathbf{L}^w}\big(k_1^{-1}l_1^{-1}lk_1\big)\\ &=H_{\mathbf{L}}\big(l_1^{-1}l\big)\\ &=H_{\mathbf{Q_R}}(wg)-H_{\mathbf{L}}(l_1),\end{aligned}$$

et

$$v_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Q}}(\lambda,wg)=\exp\big(-\lambda\big(H_{\mathbf{L}}(l_1)\big)\big)\times v_{\mathbf{R}^w}^{\mathbf{Q}^w}\big(w^{-1}.\lambda,g\big).$$

On vérifie que

$$\theta_{\mathbf{R}}^{\mathbf{M_Q}}(\lambda)=\theta_{\mathbf{R}^w}^{\mathbf{M_{Q^w}}}\big(w^{-1}.\lambda\big).$$

Finalement, on a l'égalité valable pour tout $\lambda\in ia_{\mathbf{L}}^*$

$$\big(v^{\mathbf{Q}}\big)_{\mathbf{L}}^{\mathbf{M_Q}}(\lambda)=\exp\big(-\lambda\big(H_{\mathbf{L}}(l_1)\big)\big)\times\big(v^{\mathbf{Q}^w}\big)_{\mathbf{L}^w}^{\mathbf{M_{Q^w}}}\big(w^{-1}.\lambda\big)$$

et le lemme s'obtient pour $\lambda=0$. □

2.6. Propriété de finitude de Howe

On conserve les notations des paragraphes précédents. On définit l'ensemble $\mathcal{C}$ des triplets

$$(X,\mathbf{M},\mathbf{Q})\in\Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)\times\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)\times\mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$$

tels que $A_{\mathbf{M}}=A_{M_\delta}$. Une partie $\widetilde{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est dite H-compacte s'il existe un compact C de $\mathfrak{h}(F)$ tel que pour tout $(X,\mathbf{M},\mathbf{Q})\in\widetilde{\mathcal{C}}$ il existe $h\in H(F)$ tel que $\mathrm{Ad}(h)X\in C$. On note $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base $\mathcal{C}$ et $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))^*$ le dual algébrique de $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$. Soit J l'application linéaire

$$J:\mathbb{C}[\mathcal{C}]\to C_c^\infty\big(\mathfrak{h}(F)\big)^*$$

définie sur la base canonique par

$$J\big((X,\mathbf{M},\mathbf{Q})\big)=J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X,.).$$

Si r est un sous-groupe ouvert compact de $\mathfrak{h}(F)$, on note $i_r^*:C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))^*\to C_c^\infty(\mathfrak{h}(F)/r)^*$ la transposée de l'injection naturelle de $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F)/r)$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$.

PROPOSITION 2.5. – *Soient r un sous-groupe ouvert compact de $\mathfrak{h}(F)$ et $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ une partie H-compacte. Alors l'image de $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{C}}]$ par l'application linéaire $i_r^* \circ J$ est de dimension finie.*

Preuve. – On fixe un couple $(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1) \times \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. On considère une partie $\widetilde{\mathcal{C}}$ H-compacte dont tous les éléments sont de la forme $(X, \mathbf{M}, \mathbf{Q})$ pour $X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)$. Nous allons prouver la proposition pour une telle partie : le cas général s'en déduit immédiatement. Par la projection sur la première composante, on confond $\widetilde{\mathcal{C}}$ avec une partie de $\Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)$. Fixons $\mathcal{T}(M_\delta)$ un système (fini) de représentants des classes de $M_\delta(F)$-conjugaisons des sous-tores maximaux de M_δ. Pour $T \in \mathcal{T}(M_\delta)$, les intersections $\mathfrak{t}(F) \cap \widetilde{\mathcal{C}}$ sont toutes relativement compactes puisque $\mathcal{C}'$ est H-compact. On en déduit qu'il existe un compact $C' \subset \mathfrak{m}_\delta(F)$ tel que toute classe $X \in \widetilde{\mathcal{C}}$ rencontre C'. La théorie de Bruhat–Tits associe au sommet de l'immeuble de H dont K^H est le fixateur un groupe $H_{\mathcal{O}}$ lisse sur l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers de F tel que $H_{\mathcal{O}} \times_{\mathcal{O}} F = H$ et $H_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = K^H$. On note $\mathfrak{h}_{\mathcal{O}}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{k}^H$ l'image naturelle de $\mathfrak{h}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{h}(F)$. Remarquons que $\mathfrak{k}^H$ est un $\mathcal{O}$-réseau de $\mathfrak{h}(F)$ stable par l'action adjointe de K^H. Notons ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$ et fixons un entier n suffisamment grand pour que $\varpi^n \mathfrak{k}^H \subset r$. Il suffit de voir que l'image de $\mathbb{C}[\widetilde{\mathcal{C}}]$ par $i^*_{\varpi^n \mathfrak{k}^H} \circ J$ est de dimension finie. D'après la ligne (2.13), on a

$$J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(X, f) = \sum_{S \in \mathcal{F}^{Q_\delta}(M_\delta)} J_{M_\delta}^{M_S}(X, f_{S,g}).$$

Il résulte de la définition de $f_{S,g}$ (cf. l. (2.14)) et du fait que $\varpi^n \mathfrak{k}^H$ est invariant par l'action adjointe par K^H que $f_{S,g} \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_\delta(F)/(\mathfrak{m}_\delta(F) \cap \varpi^n \mathfrak{k}^H))$. La proposition résulte alors immédiatement de la propriété de finitude de Howe pour les intégrales orbitales pondérées usuelles (cf. [28] proposition IV.1) □

Soit $\hat{j}$ la fonction définie sur $\mathcal{C} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ et tout $(X, \mathbf{M}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{C}$ on ait

$$J\big((X, \mathbf{M}, \mathbf{Q})\big)(\hat{f}) = \int_{\mathfrak{h}(F)} \left|D^{\mathfrak{h}}(Z)\right|_F^{-1/2} f(Z) \hat{j}\big((X, \mathbf{M}, \mathbf{Q}), Z\big)\, dZ.$$

On déduit de la proposition précédente le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.6. – *Soient r un compact de $\mathfrak{h}(F)$ et $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ une partie H-compacte. Alors la famille indexée par $Z \in r \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$ des fonctions $\hat{j}(., Z)$ engendre un sous-espace de dimension finie de l'espace des fonctions sur $\widetilde{\mathcal{C}}$.*

3. Une propriété des (G, M)-familles

3.1. Dans toute cette partie, le corps de base F est local non-archimédien de caractéristique nulle. On considère $\mathbf{G}$ un espace tordu réductif connexe défini sur F. On reprend les notations de la section 1. On fixe un sous-groupe de Lévi $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. On note Γ l'ensemble des $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles : c'est naturellement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note Φ le sous-$\mathbb{C}$-espace de Γ formé des $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles $v(g)$ pour $g \in \mathbb{C}[G(F)]$ (cf. §1.7). Pour $\varphi \in C_c^\infty(G(F))$, on définit une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille notée $v(\varphi)$ par

$$v_{\mathbf{P}}(\lambda, \varphi) = \int_{G(F)} \exp\big(-\lambda\big(H_{\mathbf{P}}(x)\big)\big)\varphi(x)\, dx,$$

pour tous $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\lambda \in a^*_{\mathbf{M},\mathbb{C}}$. On vérifie que $v(\varphi) \in \Phi$. Nous conviendrons d'appeler $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille *pondérale* tout élément de Φ.

DÉFINITION 3.1. – Nous dirons que deux $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles c et d sont équivalentes si, pour tout $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $\dim(a^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}})$ de la fonction $c_P - d_P$ sont nulles en 0 ; nous emploierons aussi l'expression « la fonction $c_P - d_P$ s'annule en 0 à l'ordre $\dim(a^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}) + 1$ ».

La pertinence de cette notion repose sur la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2. – *Soient c et d deux $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles équivalentes. Alors pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{L}(\mathbf{M})$ et tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}(\mathbf{L})$*

$$c^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}} = d^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{L}}.$$

Preuve. – C'est une conséquence évidente des définitions (cf. également l'égalité (6.5) p. 37 de [1]). □

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3. – *Toute $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille est équivalente à une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille pondérale.*

Ce théorème m'a été communiqué par Waldspurger dans le cas de (G, M)-familles associées à un groupe G déployé. Dans la suite, en exploitant des résultats de Casselman (cf. [15]), on reprend la démonstration de Waldspurger en l'étendant à tous les espaces tordus réductifs. C'est l'objet des paragraphes 3.2 à 3.11. Je suis particulièrement reconnaissant à Waldspurger de m'avoir permis de reprendre ici ses arguments. Finalement, on montre au §3.11 comment déduire le théorème 3.3 du cas des (G, M)-familles.

3.2. On fixe désormais un groupe G réductif connexe sur F ainsi qu'un sous-groupe parabolique P de G et M un facteur de Lévi de P. Tous les groupes considérés seront définis sur F. On fixe aussi un sous-groupe parabolique minimal P_0 de G tel que $P_0 \subset P$. On pose $M_0 = M_{P_0}$. On distingue alors les sous-groupes paraboliques standard, i.e. ceux qui contiennent P_0, et les sous-groupes de Lévi standard, i.e. les éléments de $\mathcal{L}^G(M_0)$ qui sont des sous-groupes de Lévi de sous-groupes paraboliques standard.

On précise les notations du §1.4 de la façon suivante : pour tout sous-groupe de Lévi L de G et tout sous-groupe H de G normalisé par L, on note $\Sigma(H, L)$, resp. $\Sigma^{\mathrm{nd}}(H, L)$, l'ensemble des racines de A_L dans H, resp. des racines indivisibles de A_L dans H. Pour alléger les notations, on pose $\Sigma = \Sigma(G, M_0)$, $\Sigma^+ = \Sigma(P_0, M_0)$, $\Sigma^- = \Sigma(\overline{P}_0, M_0)$ où $\overline{P}_0$ est le sous-groupe parabolique opposé à P_0. On a $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$. Usuellement, pour $\alpha \in \Sigma$, on écrit $\alpha > 0$, resp. $\alpha < 0$, si $\alpha \in \Sigma^+$, resp. Σ^-. On ajoute nd en exposant pour signifier qu'il faut prendre l'intersection avec $\Sigma^{\mathrm{nd}}(G, M_0)$. On pose $\Delta_0 = \Delta_{M_0}$.

Si L est un sous-groupe de Lévi standard, il existe un unique $Q \in \mathcal{P}(L)$ standard. On pose $\Delta_L = \Delta_Q$ et $\Sigma^{\mathrm{nd},+}_L = \Sigma^{\mathrm{nd}}(N_Q, L)$. Pour le groupe L muni du sous-groupe parabolique minimal $L \cap P_0$, on dispose d'ensembles analogues, que l'on note de la même façon en ajoutant L en exposant, par ex. $\Sigma^{L,+} = \Sigma(L \cap P_0, M_0)$.

On définit pour tout $Q \in \mathcal{F}$ un élément $\rho_Q = \rho^G_Q \in a^*_{M_Q}$ par

$$2\rho_Q = \sum_{\alpha \in \Sigma(Q, M_0)} \alpha.$$

On pose $\rho_0 = \rho_{P_0}$ et $\rho^L = \rho^L_{L \cap P_0}$ pour tout $L \in \mathcal{L}$.

On note $\mathcal{A}$ l'appartement associé au tore déployé maximal A_0 dans l'immeuble de Bruhat–Tits de G et x_0 le sommet spécial de $\mathcal{A}$ dont K est le fixateur (cf. §1.7). Considérons $\mathcal{C}$ la chambre vectorielle définie par

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{A}; \alpha(x - x_0) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma^+\}.$$

Il existe une unique chambre C de $\mathcal{A}$ incluse dans $\mathcal{C}$ qui admette x_0 comme sommet. On note I le sous-groupe d'Iwahori de $G(F)$ défini comme le stabilisateur de tout point intérieur de C. On a alors l'inclusion $P_0(F) \cap K \subset I$. Dans la suite, on normalise la mesure de Haar sur G par

$$\mathrm{mes}(I) = 1.$$

3.3. Quelques rappels

On notera W_{aff} le groupe $\mathrm{Norm}_{G(F)}(M_0(F))/(K \cap M_0(F))$. Ce groupe est isomorphe au produit semi-direct $(M_0(F)/(K \cap M_0(F))) \rtimes W_0^G$ si l'on identifie W_0^G au groupe quotient $\mathrm{Norm}_K(M_0(F))/(K \cap M_0(F))$. Par la suite, on fera l'abus suivant : on confondra un élément de W_0^G et un élément de $\mathrm{Norm}_K(M_0(F))$ qui le représente.

De façon usuelle, on associe à tout $\alpha \in \Delta_0$ un élément $s_\alpha \in W_0^G$. Tout $w \in W_0^G$ admet une décomposition

$$w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_l}, \tag{3.1}$$

avec $\alpha_j \in \Delta_0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant l$ telle que l soit minimale. On appelle décomposition réduite de w toute telle décomposition. On note $l(w)$ l'entier l : c'est par définition la longueur de w. On munit W_0^G de l'ordre de Bruhat : pour $w', w \in W_0^G$, on a $w' \leqslant w$ si et seulement si w admet une décomposition minimale (3.1) telle que $w' = s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_k}}$, avec $1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant l$. On écrit $w' < w$ si, de plus, $w' \neq w$.

On note $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke–Iwahori, i.e. la sous-algèbre de convolution de $C_c^\infty(G(F))$ formée des fonctions bi-invariantes par I. On utilisera librement les faits connus sur la structure de cette algèbre (cf. par ex. [14] théorème 3.6). Pour tout $w \in W_{\mathrm{aff}}$, la fonction caractéristique de IwI est un élément de $\mathcal{H}$ que l'on notera T_w.

Pour tout $w \in W_{\mathrm{aff}}$, on définit un entier $q(w)$ par

$$q(w) = |IwI/I|.$$

À tout $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd},+}$, on associe, comme Casselman ([15] p. 390), un entier naturel non nul q_α et un rationnel $q_{\alpha/2}$ (mais $q_\alpha q_{\alpha/2}$ est un entier naturel non nul). Ces nombres ne dépendent que de l'orbite de α sous W_0^G. Posons pour tout $w \in W_0^G$

$$\Sigma_w = w(\Sigma^{\mathrm{nd},-}) \cap \Sigma^{\mathrm{nd},+}. \tag{3.2}$$

Nous avons la relation bien connue (cf. par ex. [14] §3.5) : pour tout $w \in W_0^G$ alors

$$q(w) = \prod_{\alpha \in \Sigma_w} q_\alpha q_{\alpha/2}. \tag{3.3}$$

Pour tout $\alpha \in \Delta_0$, on définit un réel $t_\alpha > 0$ par

$$t_\alpha \rho_0(\alpha^\vee) = -\ln(q_{\alpha/2}^{-1/2} q_\alpha^{-1}). \tag{3.4}$$

Pour tout $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}$, il existe $w \in W_0^G$ tel que $\alpha = w^{-1}\beta \in \Delta_0$: on pose alors $t_\beta = t_\alpha$. C'est cohérent car on vérifie que t_α ne dépend que de l'orbite de α sous W_0^G.

3.4. Représentations induites

Pour tout sous-groupe parabolique standard Q de G et tout $\lambda \in a_{M_Q,\mathbb{C}}^*$, on considère l'espace $I_Q(\lambda)$ formé des fonctions complexes f sur G, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact et qui vérifient pour tous $m \in M_Q(F)$, $n \in N_Q(F)$ et $g \in G(F)$

$$f(mng) = \exp\bigl((\lambda + \rho_Q)\bigl(H_{M_Q}(m)\bigr)\bigr) f(g).$$

On note r l'action (à gauche) de G sur $I_Q(\lambda)$ par translation à droite et on en déduit une action notée encore r de l'algèbre de convolution $C_c^\infty(G(F))$ sur $I_Q(\lambda)$. Sur $I_Q(\lambda) \times I_Q(-\lambda)$, nous avons un accouplement $\langle .|. \rangle$ défini pour tout $(f_\lambda, f_{-\lambda}) \in I_Q(\lambda) \times I_Q(-\lambda)$ par

$$\langle f_\lambda | f_{-\lambda} \rangle = \int_K f_\lambda(k) f_{-\lambda}(k)\, dk.$$

Pour cet accouplement, nous avons la relation d'adjonction : pour tout couple $(f_\lambda, f_{-\lambda})$ comme précédemment et tout $\varphi \in C_c^\infty(G(F))$

$$\bigl\langle r(\varphi) f_\lambda | f_{-\lambda} \bigr\rangle = \bigl\langle f_\lambda | r(\check{\varphi}) f_{-\lambda} \bigr\rangle, \tag{3.5}$$

où $\check{\varphi}$ est défini pour tout $g \in G(F)$ par $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$.

Pour tout sous-groupe H de $G(F)$, on note $I_Q(\lambda)^H$ le sous-espace de $I_Q(\lambda)$ formé des éléments H-invariants. L'espace $I_Q(\lambda)^K$ est engendré par la fonction $E_{Q,\lambda}$ définie pour tout $g \in G(F)$ par

$$E_{Q,\lambda}(g) = \exp\bigl((\lambda + \rho_Q)\bigl(H_Q(g)\bigr)\bigr).$$

Pour tout $w \in W_0^G$, on définit la fonction $e_{Q,\lambda}^w$ comme l'unique fonction de $I_Q(\lambda)^I$ à support dans $Q(F)wI$ et telle que $e_{Q,\lambda}^w(w) = 1$. En fait, cette fonction ne dépend que de la classe $W_0^{M_Q} w$. L'espace $I_Q(\lambda)^I$ est alors muni de la base $(e_{Q,\lambda}^w)$, où w parcourt un système quelconque de représentants de $W_0^{M_Q} \backslash W_0^G$. De plus, pour tous w_1 et w_2 dans W_0^G, on a

$$\bigl\langle e_{Q,\lambda}^{w_1} | e_{Q,-\lambda}^{w_2} \bigr\rangle = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w \in W_0^{M_Q} w_1} q(w), & \text{si } w_1 \in W_0^{M_Q} w_2\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.6}$$

3.5. Lien avec les (G, M)-familles

Définissons les ensembles

$$V_M = \bigl\{ w \in W_0^G;\ w \text{ est de longueur minimale dans } wW_0^M \bigr\}$$

et

$$V'_M = \bigl\{ w \in W_0^G;\ w\Delta_0^M \subset \Delta_0 \bigr\}.$$

LEMME 3.4. – *Les assertions suivantes sont vraies* :

(i) *V_M est un système de représentants du quotient W_0^G/W_0^M ;*
(ii) *$V'_M \subset V_M$;*
(iii) *pour tous $w \in V_M$ et $v \in W_0^M$, si $w = s_1 \dots s_{l(w)}$ et $v = s'_1 \dots s'_{l(v)}$ sont des décompositions réduites alors $s_1 \dots s_{l(w)} s'_1 \dots s'_{l(v)}$ est une décomposition réduite de wv ;*
(iv) *pour tous $w \in V_M$ et $w' \in wW_0^M$, on a $w \leqslant w'$.*

Preuve. – Les assertions (i) et (ii) sont des conséquences de [10] proposition 3.9 (i) et (ii). Si l'assertion (iii) était en défaut, nous aurions par la « condition d'échange » des groupes de Coxeter ([13] chap. IV n. 1.5) des entiers j et k, $1 \leqslant j \leqslant l(w)$ et $1 < k \leqslant l(v)$ tels que $s_j \dots s_{l(w)} s'_1 \dots s'_{k-1} = s_{j+1} \dots s_{l(w)} s'_1 \dots s'_k$. L'élément

$$w'' = s_1 \dots \hat{s}_j \dots s_{l(w)},$$

où le chapeau désigne un élément omis, est tel que $w'' \in wW_0^M$ et $w'' < w$; en particulier $l(w'') < l(w)$ ce qui n'est pas. Enfin, l'assertion (iv) est une conséquence évidente de l'assertion (iii). □

Pour tout $w \in V'_M$, on définit les sous-groupes paraboliques ${}_wQ = wMw^{-1}P_0$ et ${}_wP = w^{-1}{}_wQw$. Le premier est standard et le second permet de définir une bijection $w \mapsto {}_wP$ de V'_M sur $\mathcal{P}(M)$.

Le lemme suivant est notre point de départ pour construire des (G,M)-familles pondérales.

LEMME 3.5. – *Soit $\varphi \in \mathcal{H}$. Pour tous $w \in V'_M$ et $\lambda \in a^*_{M,\mathbb{C}}$, posons*

$$\gamma^{\varphi}_{{}_wP}(\lambda) = q(w)^{-1} \langle E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}} | r(\varphi) e^w_{{}_wQ,w\lambda+\rho_{{}_wQ}} \rangle.$$

Alors la famille $(\gamma^{\varphi}_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille pondérale.

Preuve. – Soit $w \in V'_M$. La relation d'adjonction (3.5) donne l'égalité

$$\langle E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}} | r(\varphi) e^w_{{}_wQ,w\lambda+\rho_{{}_wQ}} \rangle = \langle r(\check{\varphi}) E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}} | e^w_{{}_wQ,w\lambda+\rho_{{}_wQ}} \rangle.$$

La fonction $r(\check{\varphi})E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}}$ appartient à $I_{{}_wQ}(-w\lambda - \rho_{{}_wQ})^I$. En l'écrivant dans la base $(e^u_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}})$, où u décrit $W_0^{wMw^{-1}} \backslash W_0^G$, et en utilisant les relations (3.6), on montre que

$$\langle r(\check{\varphi}) E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}} | e^w_{{}_wQ,w\lambda+\rho_{{}_wQ}} \rangle = q(w) q_M \big(r(\check{\varphi}) E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}} \big)(w),$$

où $q_M = \sum_{u\in W_0^M} q(u)$. Par définition de r, nous avons

$$\big(r(\check{\varphi}) E_{{}_wQ,-w\lambda-\rho_{{}_wQ}} \big)(w) = \int_{G(F)} \exp\big(-w\lambda\big(H_{{}_wQ}(wx)\big)\big) \check{\varphi}(x)\, dx.$$

Mais il résulte de la définition de ${}_wQ$ que

$$w\lambda\big(H_{{}_wQ}(wx)\big) = \lambda\big(w^{-1}H_{{}_wQ}(wx)\big) = \lambda\big(H_{{}_wP}(x)\big).$$

Maintenant, il est clair que

$$\gamma^{\varphi}_{{}_wP} = v_{{}_wP}(q_M \check{\varphi})$$

d'où le lemme. □

3.6. Vecteurs fixes par un sous-groupe parahorique

Pour tous $w \in V_M$ et $\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}}$, on définit

$$e^{wW_0^M}_{P_0,\mu} = \sum_{u \in W_0^M} e^{wu}_{P_0,\mu}.$$

La famille $(e^{wW_0^M}_{P_0,\mu})_{w\in V_M}$ est une base du sous-espace $I_{P_0}(\mu)^J$ des vecteurs invariants par le sous-groupe parahorique $J = IW_0^M I$. L'élément $T_M \in \mathcal{H}$, défini par

$$T_M = \sum_{u \in W_0^M} T_u,$$

vérifie les égalités $T_M^2 = \mathrm{mes}(J)T_M$ (avec $\mathrm{mes}(J) = \sum_{u\in W_0^M} q(u)$) et $T_M T_u = q(u)T_M$ pour tout $u \in W_0^M$. L'opérateur $r(T_M)$ sur $I_{P_0}(\mu)$ est, à une homothétie près, un projecteur sur $I_{P_0}(\mu)^J$. On vérifie que $r(T_v)e^1_{P_0,\mu} = e^{v^{-1}}_{P_0,\mu}$ pour tout $v \in W_0^G$, et l'on en déduit que pour tout $w \in V_M$ et tout $v \in W_0^M$,

$$r(T_M)e^{wv}_{P_0,\mu} = q(v)e^{wW_0^M}_{P_0,\mu}. \tag{3.7}$$

On définit une forme linéaire Ψ sur tout espace $I_{P_0}(\mu)$ par

$$\Psi(f) = \langle E_{P_0,-\mu}|f\rangle \tag{3.8}$$

pour tout $f \in I_{P_0}(\mu)$. On peut alors énoncer le lemme suivant.

LEMME 3.6. – *Avec les notations du lemme* 3.5*, on a*

$$\gamma^{\varphi}_{wP}(\lambda) = q(w)^{-1}\Psi\big(r(\varphi)e^{wW_0^M}_{w\lambda+\rho_{wQ}-\rho^{wMw^{-1}}}\big).$$

Preuve. – Oublions pour l'instant les notations du lemme. Considérons un sous-groupe parabolique standard Q et $\lambda \in a^*_{M_Q,\mathbb{C}}$. L'espace $I_Q(\lambda)$ est naturellement un sous-G-module de $I_{P_0}(\lambda - \rho^{M_Q})$ et pour tout $w \in W_0^G$

$$e^w_{Q,\lambda} = \sum_{u \in W_0^{M_Q}} e^{uw}_{P_0,\lambda-\rho^{M_Q}}.$$

Soit $w \in V'_M$; supposons que $M = w^{-1}M_Q w$. Comme $wW_0^M = W_0^{M_Q}w$, il vient

$$e^w_{Q,\lambda} = e^{wW_0^M}_{P_0,\lambda-\rho^{M_Q}}$$

et donc pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$

$$r(\varphi)e^w_{Q,\lambda} = r(\varphi)e^{wW_0^M}_{P_0,\lambda-\rho^{M_Q}}.$$

Comme les fonctions $E_{Q,-\lambda}$ et $E_{P_0,-\lambda+\rho^{M_Q}}$ valent identiquement 1 sur K, on déduit de la ligne précédente que

$$\big\langle E_{Q,-\lambda}\big|r(\varphi)e^w_{Q,\lambda}\big\rangle = \Psi\big(r(\varphi)e^{wW_0^M}_{P_0,\lambda-\rho^{M_Q}}\big).$$

Revenons aux notations du lemme : pour conclure, il suffit maintenant de remplacer dans la ligne ci-dessus Q par ${}_wQ$ et λ par $w\lambda + \rho_{wQ}$. $\square$

3.7. Opérateurs d'entrelacement

Pour $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd},+}$ et $k \in \mathbb{Z}$, considérons les hyperplans de $a^*_{0,\mathbb{C}}$

$$H^0_{\alpha,k} = \{\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}};\ t_\alpha \mu(\alpha^\vee) = 2k\pi i\}.$$

Posons

$$\Omega = a^*_{0,\mathbb{C}} - \bigcup_{\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nd},+},\ k\in\mathbb{Z}} H^0_{\alpha,k}.$$

Tout $\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}}$ définit un caractère non ramifié χ de $M_0(F)$ ainsi :

$$\forall x \in M_0(F), \quad \chi(x) = \exp\big(\mu\big(H_0(x)\big)\big).$$

Pour $\mu \in \Omega$, le caractère χ est régulier i.e. le seul élément w de W_0^G qui vérifie $w\chi = \chi$ est $w = 1$. Il est bien connu (cf. [15] théorème 3.1) que pour $\mu \in \Omega$ et pour tout $w \in W_0^G$, il existe un unique opérateur d'entrelacement

$$\tilde{J}(w,\mu) : I_{P_0}(\mu) \to I_{P_0}(w\mu)$$

qui vérifie pour tout $\mu \in \Omega$

$$\tilde{J}(w,\mu)E_{P_0,\mu} = \Bigg[\prod_{\alpha\in\Sigma_{w^{-1}}} c_\alpha(\mu)\Bigg]E_{P_0,w\mu}. \tag{3.9}$$

On a introduit pour tout $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd}}$, la fonction donnée pour $\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}}$ par

$$c_\alpha(\mu) = \frac{(1 - q_{\alpha/2}^{-1/2} q_\alpha^{-1}\exp(-t_\alpha\mu(\alpha^\vee)))(1 + q_{\alpha/2}^{-1/2}\exp(-t_\alpha\mu(\alpha^\vee)))}{1 - \exp(-2t_\alpha\mu(\alpha^\vee))}. \tag{3.10}$$

Pour ne pas alourdir les notations par des puissances négatives, nous posons simplement

$$b_\alpha(\mu) = c_\alpha(\mu)^{-1}. \tag{3.11}$$

Les singularités de la fonction b_α se trouvent sur les hyperplans suivants, $k \in \mathbb{Z}$:
- $H^+_{\alpha,k} = \{\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}};\ t_\alpha\mu(\alpha^\vee) = \ln(q_{\alpha/2}^{-1/2} q_\alpha^{-1}) + 2k\pi i\}$;
- $H^-_{\alpha,k} = \{\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}};\ t_\alpha\mu(\alpha^\vee) = \ln(q_{\alpha/2}^{-1/2}) + \pi i + 2k\pi i\}$.

On déduit de ce qui précède que pour tout $w \in W_0^G$ et μ dans l'ouvert

$$\Omega_w = \Omega - \bigcup_{k\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\Sigma_{w^{-1}}} H^\pm_{\alpha,k},$$

il existe un unique opérateur d'entrelacement

$$J(w,\mu) : I_{P_0}(\mu) \to I_{P_0}(w\mu),$$

tel que

$$J(w,\mu)E_{P_0,\mu}=E_{P_0,w\mu}.$$

On déduit de notre normalisation les propriétés suivantes (pour μ dans un ouvert adéquat) :

– pour tous $w_1,w_2\in W_0^G$

$$J(w_1w_2,\mu)=J(w_1,w_2\mu)J(w_2,\mu)\ ; \tag{3.12}$$

– pour tout $w\in W_0^G$ et tout couple $(f_1,f_2)\in I_{P_0}(-w\mu)\times I_{P_0}(\mu)$,

$$\langle f_1|J(w,\mu)f_2\rangle=\langle J(w^{-1},-w^{-1}\mu)f_1|f_2\rangle\ ; \tag{3.13}$$

– en particulier, pour tous $w\in W_0^G$ et $f\in I_{P_0}(\mu)$,

$$\Psi\big(J(w,\mu)f\big)=\Psi\big(f\big). \tag{3.14}$$

3.8. Action des opérateurs d'entrelacement sur quelques vecteurs

Dans ce paragraphe, les calculs qui suivent valent pour μ dans un certain ouvert de $a_{0,\mathbb{C}}^*$ qu'on ne précisera qu'ultérieurement. On déduit de résultats de Casselman (théorème 3.1 et lemme 3.4 de [15]), que pour $w\in W_0^G$ et tout $\alpha\in\Delta_0$ tel que $l(s_\alpha w)=l(w)+1$, on a

$$J(s_\alpha,\mu)e^w_{P_0,\mu}=(q_\alpha q_{\alpha/2})^{-1}b_\alpha(\mu)e^{s_\alpha w}_{P_0,s_\alpha\mu}+\big(1-b_\alpha(\mu)\big)e^w_{P_0,s_\alpha\mu}. \tag{3.15}$$

En raisonnant par récurrence sur la longueur de w, on obtient des coefficients complexes $b(w,w',\mu)$, nuls si $w'\nleqslant w$ et tels que

$$J(w,\mu)e^1_{P_0,\mu}=\sum_{w'\leqslant w}b(w,w',\mu)e^{w'}_{P_0,w\mu}. \tag{3.16}$$

En utilisant le fait que pour tous $w\in W_0^G$,

$$b_\alpha(w\mu)=b_{w^{-1}\alpha}(\mu), \tag{3.17}$$

on vérifie que

$$b(w,w,\mu)=q(w)^{-1}\prod_{\alpha\in\Sigma_{w^{-1}}}b_\alpha(\mu).$$

Remplaçons μ par $w^{-1}\mu$ dans (3.16) et posons $b'(w,w',\mu)=b(w,w',w^{-1}\mu)$. Fixons maintenant l'ouvert auquel appartient μ : on prend

$$\Omega'=\Omega-\bigcup_{k\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\Sigma^{\mathrm{nd},+}}H^{\pm}_{-\alpha,k}.$$

Pour tout $w\in W_0^G$, la ligne (3.16) se récrit sous la forme suivante

$$J\big(w,w^{-1}\mu\big)e^1_{P_0,w^{-1}\mu}=\sum_{w'\leqslant w}b'(w,w',\mu)e^{w'}_{P_0,\mu}. \tag{3.18}$$

Supposons de plus que $w \in V_M$. Appliquons l'opérateur $r(T_M)$ à la ligne (3.18). En utilisant l'égalité (3.7) du §3.6, nous obtenons que

$$\begin{aligned}&J\big(w, w^{-1}\mu\big)e_{P_0,w^{-1}\mu}^{W_0^M}\\&\quad= b'(w,w,\mu)e_{P_0,\mu}^{wW_0^M} + \sum_{w'\in V_M,\ w'<w}\Bigg(\sum_{u\in W_0^M,\ w'u<w} b'(w,w'u,\mu)q(u)\Bigg)e_{P_0,\mu}^{w'W_0^M}.\end{aligned}$$

Nous avons là un système triangulaire d'équations linéaires qui est inversible puisque les coefficients diagonaux

$$b'(w,w,\mu) = q(w)^{-1}\prod_{\alpha\in\Sigma_w} b_{-\alpha}(\mu)$$

ne s'annulent pas sur Ω'. Par inversion de ce système, nous en déduisons que, pour tous $w, w' \in V_M$, il existe des coefficients $c_M(w,w',\mu)$, nuls sauf si $w' \leqslant w$, tels que

$$c_M(w,w,\mu) = \prod_{\alpha\in\Sigma_w} c_{-\alpha}(\mu) \tag{3.19}$$

et pour tout $w \in V_M$

$$q(w)^{-1}e_{P_0,\mu}^{wW_0^M} = \sum_{w_1\in V_M,\ w_1\leqslant w} c_M(w,w_1,\mu)J\big(w_1, w_1^{-1}\mu\big)e_{P_0,w_1^{-1}\mu}^{W_0^M}. \tag{3.20}$$

3.9. Dans toute la suite, on note v^M l'élément de plus grande longueur de W_0^M.

LEMME 3.7. – *Pour tout* $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$, *on a*

$$e_{P_0,\lambda-\rho^M}^{W_0^M} = \mathrm{mes}(J)J\big(v^M, \lambda+\rho^M\big)e_{P_0,\lambda+\rho^M}^1.$$

Preuve. – Pour $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$, l'opérateur d'entrelacement $J(v^M, \lambda+\rho^M)$ est défini par une intégrale absolument convergente de la façon suivante : il existe une constante C non nulle telle que pour toute $f \in I_{P_0}(\lambda+\rho^M)$, la fonction $J(v^M,\lambda+\rho^M)f$ vaut en $g \in G(F)$

$$C\int_{N_0(F)\cap M(F)} f\big(v^M ng\big)\,dn. \tag{3.21}$$

Fixons $f \in I_{P_0}(\lambda+\rho^M)$ et $g \in G(F)$. La fonction $m \in M(F) \mapsto f(mg)$ appartient à l'induite $I_{M\cap P_0}^M(\lambda+\rho_0^G)$ (relative à M). Comme pour tout $\alpha \in \Delta_0^M$, on a

$$(\rho_0+\lambda)\big(\alpha^\vee\big) = \big(\rho^M\big)\big(\alpha^\vee\big) > 0,$$

on sait que la fonction

$$m \in M(F) \mapsto \big[J\big(v^M,\lambda+\rho^M\big)f\big](mg)$$

appartient à l'unique sous-représentation irréductible de $I_{M\cap P_0}^M(\lambda+\rho_P-\rho^M)$ (cf. par ex. [11] chap. XI corollaire 2.7). On en déduit alors que $J(v^M,\lambda+\rho^M)f$ appartient au sous-espace $I_P(\lambda)$ de $I_{P_0}(\lambda-\rho^M)$. Prenons maintenant $f = e_{P_0,\lambda+\rho^M}^1$. La fonction $J(v^M,\lambda+\rho^M)f$ appartient à

$I_P(\lambda)^I$ et on vérifie facilement sur l'expression (3.21) que son support est inclus dans $P(F)I$. Par conséquent, $J(v^M, \lambda+\rho^M)f$ est colinéaire à la fonction $e^1_{P,\lambda} = e^{W_0^M}_{P_0,\lambda-\rho^M}$. Il reste à évaluer le coefficient de proportionnalité. Pour cela, on applique la forme linéaire Ψ (cf. l. (3.8) du §3.6). On obtient

– d'une part, à l'aide de la propriété (3.14),

$$\Psi\big(J\big(v^M, \lambda+\rho^M\big)e^1_{P_0,\lambda+\rho^M}\big) = \Psi\big(e^1_{P_0,\lambda+\rho^M}\big) = 1\ ;$$

– d'autre part,

$$\Psi\big(e^1_{P,\lambda}\big) = \sum_{w\in W_0^M} q(w) = \mathrm{mes}(J). \qquad \square$$

LEMME 3.8. – *Soient f une fonction holomorphe sur $a^*_{0,\mathbb{C}}$ et n, k des entiers naturels. Pour toute famille $(\mu_h)_{1\leqslant h\leqslant n}$ de points $\mu_h \in a^*_{0,\mathbb{C}}$, il existe une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $a^*_{0,\mathbb{C}}$ et un élément $\varphi \in \mathcal{H}$ de sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées* :

– *pour tout $\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}}$, on a l'égalité $r(\varphi)e^1_{P_0,\mu} = \tilde{f}(\mu)e^1_{P_0,\mu}$;*

– *pour tout h, $1 \leqslant h \leqslant n$, la fonction $f - \tilde{f}$ s'annule en μ_h à l'ordre k.*

Preuve. – Soient $m \in M_0(F)$ et $T_m \in \mathcal{H}$ associé à l'image de m dans le quotient $M_0(F)/(K\cap M_0(F))$ (cf. §3.3). Si m vérifie de plus $\alpha(H_0(m)) < 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma^+$, on montre sans difficulté que

$$r(T_m)e^1_{P_0,\mu} = \exp\big(\mu\big(H_0(m)\big)\big)e^1_{P_0,\mu}$$

pour tout $\mu \in a^*_{0,\mathbb{C}}$. Mais T_m est inversible dans $\mathcal{H}$. On en déduit que tout élément de la sous-algèbre de $\mathcal{H}$ engendrée par de tels T_m et leurs inverses agit sur $e^1_{P_0,\mu}$ par multiplication par $\tilde{f}(\mu)$ où $\tilde{f}$ est une combinaison linéaire de fonctions

$$\mu \mapsto \exp\big(\mu(X)\big)$$

où X parcourt le réseau $H_0(M_0(F))$ de $a^*_{0,\mathbb{C}}$. On peut alors approximer en un nombre fini de points n'importe quelle fonction holomorphe par une telle fonction $\tilde{f}$. $\square$

Rappelons qu'au lemme 3.5, nous avions défini, pour tout $w \in V'_M$ et tout $\varphi \in \mathcal{H}$, une fonction holomorphe γ^φ_{wP} sur $a^*_{M,\mathbb{C}}$. Posons $d = \dim(a^G_M)$.

LEMME 3.9. – *Soient $w \in V'_M$ et f une fonction sur $a^*_{0,\mathbb{C}}$ holomorphe au voisinage de $\rho_{wP} + \rho^M$. Il existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tel que*

(i) *pour tout $w' \in V'_M$, $w \nleqslant w'$, la fonction $\gamma^\varphi_{w'P}$ s'annule en 0 à l'ordre d ;*

(ii) *la fonction $\lambda \in a^*_{M,\mathbb{C}} \mapsto c_M(w, w, w\lambda + \rho_{wQ} - \rho^{wMw^{-1}})$ est holomorphe au voisinage de 0 et la fonction*

$$\lambda \in a^*_{M,\mathbb{C}} \mapsto \gamma^\varphi_{wP}(\lambda) - \mathrm{mes}(J)c_M\big(w, w, w\lambda + \rho_{wQ} - \rho^{wMw^{-1}}\big)f\big(\lambda + \rho_{wP} + \rho^M\big)$$

s'annule en 0 à l'ordre d.

Preuve. – Soient $w \in V'_M$ et f comme dans l'énoncé du lemme. Soient k un entier et f' une fonction holomorphe sur $a^*_{0,\mathbb{C}}$ qui s'annule à l'ordre k en tout point $v^{-1}\rho_0$ pour $v \in W_0^G - \{w\}$ et telle que la fonction $f - f'$ s'annule à l'ordre d en

$$w^{-1}\rho_0 = \rho_{wP} + \rho^M.$$

Soient $\varphi \in \mathcal{H}$ et $\tilde{f}$ holomorphe qui vérifient les conditions du lemme 3.8 pour la fonction f', l'entier k et tous les points $v^{-1}\rho_0$ quand v parcourt W_0^G.

Soit $w' \in V'_M$. Appliquons successivement l'opérateur $r(\varphi)$ et la forme linéaire Ψ à la ligne (3.20). En utilisant le fait que $r(\varphi)$ commute aux opérateurs d'entrelacement et la propriété (3.14) du §3.7, on obtient l'égalité

$$q(w')^{-1}\Psi\big(r(\varphi)e_{P_0,\mu}^{w'W_0^M}\big) = \sum_{w_1\in V_M,\ w_1\leqslant w'} c_M(w',w_1,\mu)\Psi\big(r(\varphi)e_{P_0,w_1^{-1}\mu}^{W_0^M}\big). \tag{3.22}$$

Fixons $w_1 \in V_M$, $w_1 < w$. On aimerait expliciter $\Psi(r(\varphi)e_{P_0,w_1^{-1}\mu}^{W_0^M})$. Pour cela, appliquons l'égalité (3.22) dans le cas $M = M_0$ en remplaçant μ par $w_1^{-1}\mu$. Il vient, pour tout $u \in W_0^G$,

$$\begin{aligned} q(u)^{-1}\Psi\big(r(\varphi)e_{P_0,w_1^{-1}\mu}^{u}\big) &= \sum_{u_1\leqslant u} c_{M_0}\big(u,u_1,w_1^{-1}\mu\big)\Psi\big(r(\varphi)e_{P_0,u_1^{-1}w_1^{-1}\mu}^{1}\big)\\ &= \sum_{u_1\leqslant u} c_{M_0}\big(u,u_1,w_1^{-1}\mu\big)\tilde{f}\big(u_1^{-1}w_1^{-1}\mu\big), \end{aligned} \tag{3.23}$$

vu le lemme 3.8, notre choix de φ et le fait que $\Psi(e_{P_0,u_1^{-1}w_1^{-1}\mu}^{1}) = 1$.

En utilisant les égalités (3.22) et (3.23), nous obtenons que

$$\begin{aligned} &q(w')^{-1}\Psi\big(r(\varphi)e_{P_0,\mu}^{w'W_0^M}\big)\\ &\quad= \sum_{w_1\in V_M,\ w_1\leqslant w'}\ \sum_{u_1\in W_0^M}\Bigg[\sum_{u\in W_0^M,\ u_1\leqslant u} q(u)c_M(w',w_1,\mu)c_{M_0}\big(u,u_1,w_1^{-1}\mu\big)\Bigg]\\ &\qquad\times \tilde{f}\big(u_1^{-1}w_1^{-1}\mu\big). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Soit $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$. Afin d'appliquer la ligne précédente à

$$\mu_\lambda = w'\lambda + \rho_{w'Q} - \rho^{w'Mw'^{-1}},$$

nous allons vérifier que $\mu_\lambda \in \Omega'$ pour λ dans un certain ouvert qui contient 0 dans son adhérence. Il nous faut regarder pour tout $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd},-}$ les valeurs de l'expression

$$\big(w'\lambda + \rho_{w'Q} - \rho^{w'Mw'^{-1}}\big)\big(\alpha^\vee\big). \tag{3.25}$$

De deux choses l'une : soit la projection de $\alpha^\vee$ sur $a_{w'Mw'^{-1},\mathbb{C}}$ est nulle ; alors, $\alpha \in \Sigma^{w'Mw'^{-1},-}$ et l'expression (3.25) vaut

$$-\rho^{w'Mw'^{-1}}\big(\alpha^\vee\big)$$

qui est un réel strictement positif. Dans ce cas, μ_λ n'appartient à aucun des hyperplans $H_{\alpha,k}^0$ et $H_{\alpha,k}^\pm$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (rappelons que $\ln(q_{\alpha/2}^{-1/2}q_\alpha^{-1}) < 0$ cf. §3.3). Soit cette projection est colinéaire à une coracine $\beta^\vee$, pour $\beta \in \Sigma^+_{w'Mw'^{-1}}$.

Par conséquent, $\mu_\lambda \in \Omega'$ pourvu que λ soit proche de 0 et hors des hyperplans $(w'\lambda)(\beta^\vee) = 0$, $\beta \in \Sigma^+_{w'Mw'^{-1}}$.

En $\lambda = 0$, l'expression (3.25) vaut

$$\big(\rho_{w'Q} - \rho^{w'Mw'^{-1}}\big)\big(\alpha^\vee\big) = \big(w'v^M w'^{-1}\rho_0\big)\big(\alpha^\vee\big). \tag{3.26}$$

Cette expression n'est donc jamais nulle. La fonction $c_\alpha(\mu_\lambda)$, est holomorphe en $\lambda=0$. Si la projection de α sur $a_{w'Mw'^{-1},\mathbb{C}}$ est nulle, $b_\alpha(\mu_\lambda)$, comme fonction de λ, est holomorphe en 0. Si l'expression (3.26) est égale à

$$t_\alpha^{-1}\ln\bigl(q_{\alpha/2}^{-1/2}q_\alpha^{-1}\bigr), \tag{3.27}$$

alors la projection de $\alpha^\vee$ sur $a_{w'Mw'^{-1},\mathbb{C}}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\beta^\vee$ avec $\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd},+}_{w'Mw'^{-1}}$; la fonction $b_\alpha(\mu_\lambda)$ a une singularité en $\lambda=0$ mais la fonction

$$(w'\lambda)\bigl(\beta^\vee\bigr)b_\alpha(\mu_\lambda)$$

est holomorphe en $\lambda=0$.

Définissons, pour des entiers naturels k_β, un polynôme homogène sur $a^*_{M,\mathbb{C}}$ par

$$F(\lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd},+}_{w'Mw'^{-1}}}(w'\lambda)\bigl(\beta^\vee\bigr)^{k_\beta},$$

pour tout $\lambda\in a^*_{M,\mathbb{C}}$ Considérons l'expression (3.24) pour $\mu=\mu_\lambda$ et λ proche de 0 et hors des hyperplans $\lambda(\beta^\vee)=0$. Les fonctions entre crochets dans cette expression sont toutes des polynômes en les $c_\alpha(\mu_\lambda)$ et $b_\alpha(\mu_\lambda)$. Donc, dès que les entiers naturels k_β sont assez grands, ces fonctions, multipliées par le polynôme F, se prolongent en des fonctions holomorphes de la variable λ au voisinage de 0. Mais, en $\mu=\mu_\lambda$, le membre de gauche de l'éq. (3.24) est précisément $\gamma^\varphi_{w',P}(\lambda)$ (cf. lemme 3.6).

Montrons maintenant l'assertion (i) du lemme. Supposons $w\nleqslant w'$ et admettons un instant que, pour λ dans un voisinage de 0, les points

$$u_1^{-1}w_1^{-1}\bigl(w'\lambda+\rho_{w'Q}-\rho^{w'Mw'^{-1}}\bigr)=u_1^{-1}w_1^{-1}w'v^Mw'^{-1}(\lambda+\rho_0) \tag{3.28}$$

sont tous distincts de $w^{-1}\rho_0$ lorsque $w_1\in V_M$, u_1 et $u\in W_0^M$ avec $w_1\leqslant w'$ et $u_1\leqslant u$. Il résulte alors des hypothèses faites en début de preuve que la fonction $F\gamma^\varphi_{w',P}$ s'annule en 0 à l'ordre k. Par conséquent, la fonction $\gamma^\varphi_{w',P}$, dont on sait par construction qu'elle est holomorphe, s'annule en 0 à l'ordre $k-\deg(F)$. On obtient l'assertion (i) du lemme en choisissant $k\geqslant d+\deg(F)$.

Il nous reste à prouver que les points décrits à la ligne (3.28) (sous la condition qui suit) sont bien tous distincts de $w^{-1}\rho_0$. Si tel n'était pas le cas, nous aurions l'égalité $w^{-1}=u_1^{-1}w_1^{-1}w'v^Mw'^{-1}$, donc les inégalités suivantes

$$w\leqslant wu_1^{-1}=w'v^Mw'^{-1}w_1\leqslant w'v^Mw'^{-1}w'=w'v^M.$$

La première inégalité vient de l'assertion (iv) du lemme 3.4, le seconde peut se voir à l'aide de l'assertion (iii) du même lemme. Par conséquent, il existerait $w''\leqslant w'$ et $v''\leqslant v^M$ tel que $w=w''v''$. En particulier, $v''\in W_0^M$ et donc $w''\in wW_0^M$. Alors, comme w est de longueur minimale dans wW_0^M, $w\leqslant w''$ (cf. lemme 3.4 (iv)). Or, $w''\leqslant w'$; nous aurions $w\leqslant w'$ et cela contredirait notre hypothèse sur w'.

Montrons l'assertion (ii) du lemme. Posons désormais

$$\mu_\lambda=w\lambda+\rho_{wQ}-\rho^{wMw^{-1}}.$$

Nous avons vu que $\mu_\lambda\in\Omega'$ pour λ dans un voisinage de 0 et hors des hyperplans radiciels. Pour $\mu=\mu_\lambda$, $w'=w$ et pour de tels λ, la ligne (3.22) se récrit

$$\gamma^{\varphi}_{{}_wP}(\lambda) = \mathrm{mes}(J)c_M(w,w,\mu_\lambda)\tilde{f}\big(\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M\big) + \sum_{w_1\in V_M,\ w_1<w} c_M(w,w_1,\mu_\lambda)\Psi\big(r(\varphi)e^{W_0^M}_{P_0,w_1^{-1}\mu_\lambda}\big). \tag{3.29}$$

En effet, le membre de gauche est donné par le lemme 3.6. Le premier terme du membre de droite est donné par le terme d'indice $w_1=w$ dans la somme de la ligne (3.22) : on remarque tout d'abord que $w^{-1}\mu_\lambda = \lambda+\rho_{{}_wP}-\rho^M$. Le lemme 3.7 combiné aux propriétés des opérateurs d'entrelacement (cf. l. (3.14) en particulier) nous donne alors

$$\Psi\big(r(\varphi)e^{W_0^M}_{P_0,w^{-1}\mu_\lambda}\big) = \mathrm{mes}(J)\Psi\big(r(\varphi)e^{1}_{P_0,\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M}\big).$$

Enfin, d'après notre choix de φ (cf. lemme 3.8), nous avons

$$\Psi\big(r(\varphi)e^{1}_{P_0,\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M}\big) = \tilde{f}\big(\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M\big)\Psi\big(e^{1}_{P_0,\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M}\big) = \tilde{f}\big(\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M\big).$$

La fonction $c_M(w,w,\mu_\lambda)$, comme produit de fonctions $c_\alpha(\mu_\lambda)$, est bien holomorphe en 0. Il résulte de (3.29) et du choix de $\tilde{f}$ que dès que k est plus grand que d, l'expression

$$\gamma^{\varphi}_{{}_wP}(\lambda) - \mathrm{mes}(J)c_M(w,w,\mu_\lambda)f\big(\lambda+\rho_{{}_wP}+\rho^M\big)$$

est égale, à une fonction holomorphe qui s'annule en 0 à l'ordre d près, à

$$\sum_{w_1\in V_M, w_1<w} c_M(w,w_1,\mu_\lambda)\Psi\big(r(\varphi)e^{W_0^M}_{P_0,w_1^{-1}\mu_\lambda}\big).$$

Comme précédemment, pour k suffisamment grand, on montre que cette dernière somme s'annule en $\lambda=0$ à l'ordre d. Cela termine la démonstration. □

3.10. Reformulation du résultat précédent

Pour tout $P'\in\mathcal{P}(M)$, on définit l'entier $l(P')$ comme le cardinal de l'ensemble $\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,M)\cap(-\Sigma^{\mathrm{nd}}(P',M))$. On pose alors pour tout $\lambda\in a^*_{M,\mathbb{C}}$

$$c_{P'}(\lambda) = \prod_{\beta}\lambda\big(\beta^\vee\big)\ ;$$

ce produit est pris sur les éléments $\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P',M)$ tels que l'hyperplan associé à β soit le support du mur qui sépare les chambres de $a^*_{M,\mathbb{C}}$ associées à P' et à un sous-groupe parabolique $P''\in\mathcal{P}(M)$ tel que $l(P'')=l(P')-1$. Le lemme suivant est une reformulation du lemme précédent.

LEMME 3.10. – *Soient $P_1\in\mathcal{P}(M)$ et f une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 dans $a^*_{M,\mathbb{C}}$. On pose $d=\dim(a^G_M)$. Il existe $\varphi\in\mathcal{H}$ de sorte que*

(i) *si $P'\in\mathcal{P}(M)$ est différent de P_1 et vérifie $l(P')\leqslant l(P_1)$, alors la fonction $\gamma^{\varphi}_{P'}$ s'annule en 0 à l'ordre d ;*

(ii) *la fonction $\gamma^{\varphi}_{P_1}-c_{P_1}f$ s'annule en 0 à l'ordre d.*

Preuve. – Soit $P'\in\mathcal{P}(M)$ tel que $l(P')\leqslant l(P_1)$. Il existe des éléments w' et w de V'_M tel que $P'={}_{w'}P$ et $P_1={}_wP$. Si $w\nleqslant w'$, on a $P'\neq P_1$ et l'assertion (i) est claire pour P', vu l'assertion (i) du lemme 3.9. Si $w\leqslant w'$ alors comme $l({}_{w'}P)\leqslant l({}_wP)$, on en déduit que $w'=w$

et donc $P' = P_1$. Il nous reste à prouver l'assertion (ii). Cherchons un équivalent simple de l'expression

$$c_M\big(w, w, w\lambda + \rho_{{}_wQ} - \rho^{wMw^{-1}}\big) \tag{3.30}$$

pour λ dans un voisinage de 0 dans $a^*_{M,\mathbb{C}}$. Les considérations qui suivent les lignes (3.26) et (3.27) montrent que l'expression (3.30) est équivalente à une constante non nulle près au produit

$$\prod \lambda\big(w^{-1}\alpha^\vee\big) \tag{3.31}$$

sur les $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd},+}$ tels que $w^{-1}\alpha < 0$ et

$$-\big(wv^M w^{-1}\rho_0\big)\big(\alpha^\vee\big) = t^{-1}_{-\alpha}\ln\big(q^{-1/2}_{-\alpha/2}q^{-1}_{-\alpha}\big). \tag{3.32}$$

Cette dernière égalité est équivalente à l'affirmation « $wv^M w^{-1}\alpha$ appartient à Δ_0 ». Cela résulte entre autres de l'égalité (3.4) du §3.3. La projection orthogonale sur $a^*_{wMw^{-1},\mathbb{C}}$ met en bijection l'ensemble

$$\big\{\alpha; \alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd},+},\ wv^M w^{-1}\alpha \in \Delta_0\big\}$$

avec $\Delta_{wMw^{-1}}$. Soit $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd},+}$ tel que $wv^M w^{-1}\alpha \in \Delta_0$. On note $\beta \in \Delta_{wMw^{-1}}$ sa projection sur $a^*_{wMw^{-1},\mathbb{C}}$. Les équations $\lambda(w^{-1}\alpha^\vee) = 0$ et $\lambda(w^{-1}\beta^\vee) = 0$ définissent le même hyperplan. L'élément w^{-1} envoie la chambre de $a^*_{wMw^{-1},\mathbb{C}}$ associée à ${}_wQ$ sur celle de $a^*_{M,\mathbb{C}}$ associée à ${}_wP$. Par conséquent, l'hyperplan $\lambda(w^{-1}\beta^\vee) = 0$ est le support d'un mur de cette dernière chambre. Si, de plus, on suppose $w^{-1}\alpha < 0$ alors ce mur appartient aussi à une chambre associée à $P' \in \mathcal{P}(M)$ tel que $l(P') = l({}_wP) - 1$. De là, on montre facilement que le produit (3.31) est égal à $c_{{}_wP}$. L'assertion (ii) se déduit alors de l'assertion (ii) du lemme 3.9. □

3.11. Preuve du théorème 3.3

Nous allons tout d'abord prouver le théorème 3.3 pour une (G, M)-famille d'un groupe G. Rappelons qu'on a défini au §3.1 des ensembles Γ et Φ. Pour tout entier k, on note Γ^k l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que pour tout $P' \in \mathcal{P}(M)$, si $l(P') < k$, la fonction $\gamma_{P'}$ s'annule en 0 à l'ordre $d = \dim(a^G_M) + 1$. Notons que $\Gamma^0 = \Gamma$ et que pour k assez grand les éléments Γ^k sont tous équivalents à 0. Par récurrence, on déduit du lemme suivant l'inclusion

$$\Gamma \subset \Phi + \Gamma^k$$

pour tout k ce qui prouve bien le théorème 3.3 dans le cas d'une (G, M)-famille.

LEMME 3.11. – *Pour tout entier k,*

$$\Gamma^k \subset \Phi + \Gamma^{k+1}.$$

Preuve. – Soit $\gamma \in \Gamma^k$. Considérons la famille finie $(P_h)_{h\in H}$ formée des $P_h \in \mathcal{P}(M)$ tel que $l(P_h) = k$. Soient $h \in H$ et R_h le polynôme de degré inférieur ou égal à d qui donne le développement de Taylor de γ_{P_h} en 0 à l'ordre d sur ia^*_M. Soit β une racine non divisible telle que l'hyperplan défini par $\beta^\vee$ sépare la chambre associée à P_h d'une chambre associée à un sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{P}(M)$ avec $l(P') < l(P_h)$. Comme $\gamma \in \Gamma^k$, $\gamma_{P'}$ s'annule en 0 à l'ordre d. Mais comme P_h et P' sont adjacents, on a $\gamma_{P_h}(\lambda) = \gamma_{P'}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in a^*_M$ tel que $\lambda(\beta^\vee) = 0$. Par conséquent le polynôme R_h est divisible par $\lambda(\beta^\vee)$ et donc par le polynôme

c_{P_h} (défini au § 3.10). Nous en déduisons un polynôme R'_h avec $R_h = c_{P_h} R'_h$. Appliquons le lemme 3.10 à $P_1 = P_h$ et $f = R'_h$. Nous obtenons une fonction $\varphi_h \in \mathcal{H}$. Il est alors clair que

$$\gamma - \sum_{h \in H} \gamma^{\varphi_h} \in \Gamma^{k+1},$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Étudions maintenant le cas d'une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille pour un espace tordu $\mathbf{G}$ quasi-déployé i.e. $\mathbf{G}$ est de la forme $G \rtimes \theta$ où G est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F et θ est une F-automorphisme de G qui fixe un épinglage $(B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_T^B})$ stable sous l'action du groupe de Galois Γ (cf. [26] §III.2). On pose $G_1 = (G^\theta)^0 = G_{1 \rtimes \theta}$: c'est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F et la paire $(B_1, T_1) = (B \cap G_1, T \cap G_1)$ est une paire de Borel Γ-stable de G_1. On pose $(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = (B \rtimes \theta, T \rtimes \theta)$.

On définit $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ comme la partie de $a_{\mathbf{T}}^*$ formée des vecteurs

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l_\alpha} \sum_{k=0}^{l_\alpha - 1} \theta^k(\alpha)$$

quand α parcourt $\Sigma(G, T)$ (l_α est le cardinal de l'orbite de α sous l'action de θ). On sait que $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ est un système de racines. Notons $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{T})'$ le sous-système formé des racines indivisibles de $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{T})$. Alors $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{T})'$ s'identifie au système de racines $\Sigma(G_1, T_1)$ (cela est dû à Steinberg, cf. [23] chap. 1 ; on trouvera aussi une démonstration dans [18]). Plus exactement, l'espace $(a_T^*)_\theta$ s'identifie à $a_{T_1}^*$ et la projection canonique

$$\begin{aligned} a_T^* &\to (a_T^*)_\theta \simeq a_{T_1}^* \\ \lambda &\mapsto \lambda_\theta \end{aligned} \tag{3.33}$$

envoie bijectivement $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{T})'$ sur $\Sigma(G_1, T_1)$. On peut donc identifier aussi les espaces $(a_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}})^*$ et $(a_{T_1}^{G_1})^*$. On montre qu'une coracine d'un élément de $\Sigma(G_1, T_1)$ est un vecteur de $a_{T_1}^G \simeq a_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ colinéaire à un élément de $\Delta_{\mathbf{B}'}^\vee$ avec $\mathbf{B}' \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. On a donc une bijection naturelle $\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) \to \mathcal{P}^{G_1}(T_1)$. Plus généralement (cf. [17] corollaire 1.25), on a des bijections, l'une entre $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et $\mathcal{L}^{G_1}(T_1)$ donnée par

$$\mathbf{M} \mapsto M_1 = M_{1 \rtimes \theta}$$

et, l'autre, pour $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$, entre $\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\mathcal{P}^{G_1}(M_{1 \rtimes \theta})$ donnée par

$$\mathbf{P} \mapsto P_1 = P_{1 \rtimes \theta}.$$

En outre, l'application (3.33) induit un isomorphisme $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^* \simeq (a_{M_1}^{G_1})^*$ qui envoie la chambre associée à $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ sur celle associée à P_1 déduit de $\mathbf{P}$. Il s'ensuit qu'il y a une identification canonique entre l'espace des $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-familles et celui des (G_1, M_1)-familles.

On fixe dans la suite K_1 un sous-groupe compact maximal « en bonne position » par rapport à $T \cap G_1$. Partons d'une $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille c. On en déduit une (G_1, M_1)-famille c^1. D'après ce qui précède, celle-ci est équivalente à une (G_1, M_1)-famille pondérale. Il existe donc $x \in \mathbb{C}[G_1(F)]$ tel que pour tout $P_1 \in \mathcal{P}^{G_1}(M_1)$ la fonction

$$\lambda \in \left(a_{M_1}^{G_1}\right)_{\mathbb{C}}^* \mapsto c_{P_1}^1(\lambda) - v_{P_1}(\lambda, x)$$

s'annule en 0 à tous les ordres inférieurs ou égaux à $\dim(a_{M_1}^{G_1})$. Considérons la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille définie par

$$\big(v_{P_1}(\lambda_\theta,x)\big)_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$$

pour $\lambda\in(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*_{\mathbb{C}}$. On n'a pas imposé de lien entre les sous-groupes K de $G(F)$ et K_1 de $G_1(F)$. Par conséquent, cette $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille n'est pas *a priori* pondérale. On va cependant montrer qu'elle est équivalente à une $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille pondérale. Pour cela, il suffit de considérer le cas où $x\in G_1(F)$. Fixons $\lambda\in(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*_{\mathbb{C}}$ et $\mathbf{P}\in\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. On munit le groupe K_1 d'une mesure de Haar et on considère l'application

$$y\in G_1(F)\mapsto\int\limits_{K_1} v_{\mathbf{P}}(\lambda,yk)\,dk.$$

Elle appartient à l'espace $I_{P_1}^{G_1}(-\lambda_\theta-\rho_{P_1})^{K_1}$ qui est un espace de dimension 1 engendré par la fonction

$$y\in G_1(F)\mapsto\exp\big(-\lambda_\theta\big(H_{P_1}(y)\big)\big).$$

Par conséquent, il existe un coefficient complexe $C_{\mathbf{P}}(\lambda)$ tel que pour tout $y\in G_1(F)$

$$\int\limits_{K_1} v_{\mathbf{P}}(\lambda,yk)\,dk = C_{\mathbf{P}}(\lambda)\exp\big(-\lambda_\theta\big(H_{P_1}(y)\big)\big) = C_{\mathbf{P}}(\lambda)v_{P_1}(\lambda_\theta,y). \tag{3.34}$$

En prenant $y=1$, on voit que

$$C_{\mathbf{P}}(\lambda)=\int\limits_{K_1} v_{\mathbf{P}}(\lambda,k)\,dk.$$

En particulier, $C_{\mathbf{P}}(0)=\operatorname{mes}(K_1)>0$ et le coefficient $C_{\mathbf{P}}(\lambda)$ est inversible dans un voisinage de 0. Posons alors pour $\lambda\in(a_M^G)^*$ et $P\in\mathcal{P}^G(M)$

$$w_P(\lambda)=\int\limits_{K_1} v_P(\lambda,xk)\,dk\times\Big(\int\limits_{K_1} v_P(\lambda,k)\,dk\Big)^{-1}.$$

On vérifie facilement que la famille $(w_P)_{P\in\mathcal{P}^G(M)}$ est une (G,M)-famille. Elle est donc équivalente à une (G,M)-famille pondérale $(v_P(\lambda,g))_{P\in\mathcal{P}^G(M)}$ avec $g\in\mathbb{C}[G(F)]$. Par ailleurs, à toute (G,M)-famille, on peut associer une $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille : on ne garde que les fonctions indexées par des paraboliques θ-stables et on les restreint à l'espace $(a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}})^*$. De cette façon, la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille déduite de w est, d'une part, équivalente à la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille pondérale $(v_{\mathbf{P}}(\lambda,g))_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$ et, d'autre part, égale à la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille $(v_{P_1}(\lambda_\theta,x))_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$ (d'après la ligne (3.34)). La $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille c dont on est parti est donc équivalente à la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille pondérale $(v_{\mathbf{P}}(\lambda,g))_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$.

Enlevons maintenant la restriction « $\mathbf{G}$ quasi-déployé ». Il existe un torseur intérieur φ de $\mathbf{G}$ vers un espace tordu quasi-déployé $\mathbf{G}^*$ (cf. [26] §III.2 et le lemme III.2.1 qui est une reformulation d'un lemme de Kottwitz et Shelstad [23] section 3.1). Quitte à conjuguer φ, on suppose que φ induit une injection

$$\mathbf{M}\mapsto\mathbf{M}^*=\varphi(\mathbf{M})$$

de $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ dans $\mathcal{L}^{\mathbf{G}^*}$ et pour $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ une bijection $\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \to \mathcal{P}^{\mathbf{G}^*}(\mathbf{M}^*)$. On déduit de la donnée du torseur φ un torseur intérieur entre groupes sous-jacents G et G^* et des bijections analogues concernant les groupes G et G^*. En outre, on a des identifications naturelles $a^*_{\mathbf{M}} \simeq a^*_{\mathbf{M}^*}$ et $a^*_M \simeq a^*_{M^*}$ etc. de sorte que l'espace des $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-familles, resp. des (G,M)-familles, s'identifie canoniquement à l'espace des $(\mathbf{G}^*,\mathbf{M}^*)$-familles, resp. des (G^*,M^*)-familles.

Partons donc d'une $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille c. Elle s'identifie à une $(\mathbf{G}^*,\mathbf{M}^*)$-famille dont on vient de voir qu'elle est équivalente à une $(\mathbf{G}^*,\mathbf{M}^*)$-famille déduite d'une (G^*,M^*)-famille. Cette dernière est donc équivalente à une (G,M)-famille pondérale $(v_P(\lambda,g))_{P\in\mathcal{P}^G(M)}$ avec $g \in \mathbb{C}[G(F)]$. On déduit alors que la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille de départ c est équivalente à la $(\mathbf{G},\mathbf{M})$-famille pondérale $(v_{\mathbf{P}}(\lambda,g))_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}$ ce qu'il fallait démontrer.

4. Intermède sur les groupes $\mathcal{L}$-stables

4.1. Dans cette partie, on suppose que F est un corps de caractéristique 0, local ou global. On considère un groupe G réductif, connexe, défini sur F qu'on suppose quasi-déployé. On note Γ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Le groupe complexe dual de G est noté $\widehat{G}$ et son centre est $Z_{\widehat{G}}$. Soit M un sous-groupe de Lévi de G. On a défini dans un travail antérieur (cf. [16] §4.4) des ensembles $\mathcal{E}(M,G)$, $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(M,G)$ et $\mathcal{E}_M(G)$ de données endoscopiques de G. Plus précisément, le premier ensemble est un certain ensemble de données endoscopiques de G paramétrées par le groupe complexe $Z^{\Gamma}_{\widehat{M}}$, pour lesquelles M s'identifie naturellement à un sous-groupe de Lévi. L'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(M,G)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{E}(M,G)$ formé de données endoscopiques elliptiques et enfin $\mathcal{E}_M(G)$ est le quotient (fini) de $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(M,G)$ par l'action naturelle de $Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$. Rappelons que le groupe G vu comme sa propre donnée endoscopique elliptique est un élément de $\mathcal{E}_M(G)$.

DÉFINITION 4.1. – On dit que G est $\mathcal{L}$-stable si pour tout sous-groupe de Lévi M de G, on a $\mathcal{E}_M(G) = \{G\}$ i.e. si

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(M,G) \subset Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}.$$

4.2. Dans cette section, nous exhibons des groupes $\mathcal{L}$-stables et nous démontrons des propriétés générales les concernant.

PROPOSITION 4.2. – *Les groupes $GL(n)$ et $SL(n)$ sont $\mathcal{L}$-stables.*

Preuve. – Le cas de $GL(n)$ est évident car le seul groupe endoscopique elliptique de $GL(n)$ est $GL(n)$ lui-même. Soit M un sous-groupe de Lévi de $SL(n)$. Le groupe $PGL(n,\mathbb{C})$ muni de l'action triviale de Γ est le groupe dual de $SL(n)$. Le groupe $\widehat{M}$ dual de M s'identifie à l'image d'un produit

$$GL(n_1,\mathbb{C}) \times \cdots \times GL(n_r,\mathbb{C})$$

dans $PGL(n,\mathbb{C})$ avec $n = n_1 + \cdots + n_r$. Soit $s \in Z_{\widehat{M}}$. L'élément H de $\mathcal{E}(M,SL(n))$ associé à s a pour groupe complexe dual $\widehat{H}$ le centralisateur connexe de s dans $PGL(n,\mathbb{C})$ (muni de l'action triviale de Γ). Ce groupe est isomorphe à l'image dans $PGL(n,\mathbb{C})$ d'un produit

$$GL(n'_1,\mathbb{C}) \times \cdots \times GL(n'_p,\mathbb{C})$$

avec $n = n'_1 + \cdots + n'_p$. Supposons de plus H elliptique : cela signifie ici que la composante neutre du centre de $\widehat{H}$ est triviale. Dans ce cas, $p = 1$ i.e. $\widehat{H} = PGL(n,\mathbb{C})$ et donc $s = 1$ ce qu'il fallait démontrer. □

PROPOSITION 4.3. – *Si G est $\mathcal{L}$-stable, il en est de même*
– *des sous-groupes de Lévi de G ;*
– *des centralisateurs connexes d'éléments semi-simples de $G(F)$ (lorsqu'ils sont quasi-déployés).*

Preuve. – Montrons qu'un sous-groupe de Lévi $L \in \mathcal{L}^G$ est $\mathcal{L}$-stable. Soient $M \in \mathcal{L}^L$ et $L' \in \mathcal{E}_{\text{ell}}(M, L)$. À L' est associé un élément $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{M}}$ tel que $\widehat{L}' = \widehat{L}_s$. On se rappelle que les groupes duaux $\widehat{M}$ et $\widehat{L}$ s'identifient à des sous-groupes de Lévi de $\widehat{G}$ et que $\widehat{M}$ s'identifie à un sous-groupe de Lévi du groupe $\widehat{L}'$, ce dernier étant muni d'une L-action de Γ qui « prolonge » celle de Γ sur $\widehat{M}$ (cf. [16] §4.4). Par conséquent sur $Z_{\widehat{L}'}$ les deux actions coïncident. Considérons l'ensemble des sous-groupes $\widehat{G}_{sz}$ de $\widehat{G}$ quand z parcourt $Z^{\Gamma}_{\widehat{L}}$. Soit $z \in Z^{\Gamma}_{\widehat{L}}$ tel que le groupe $\widehat{G}' = \widehat{G}_{sz}$ soit maximal dans cet ensemble ordonné par l'inclusion. Montrons que $G' \in \mathcal{E}_{\text{ell}}(M, G)$ i.e. que $(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'})^0 = (Z^{\Gamma}_{\widehat{G}})^0$. Raisonnons par contradiction : si

$$\left(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'}\right)^0 \not\subset Z_{\widehat{G}},$$

il existe, pour un sous-tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{L}$ contenant s, une racine $\alpha_0 \in \Sigma(\widehat{G}, \widehat{T}) - \Sigma(\widehat{G}', \widehat{T})$ tel que α_0 n'induise pas le caractère trivial sur $(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'})^0$. Donc il existe $t_0 \in (Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'})^0$ tel que

$$\alpha_0(t_0) = \alpha_0(sz)^{-1}.$$

Le groupe $\widehat{G}_{t_0 sz}$ contient strictement $\widehat{G}'$ ce qui contredit la maximalité de $\widehat{G}'$ vu que

$$t_0 \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'} \subset Z^{\Gamma}_{\widehat{M}}.$$

Par conséquent, on obtient $G' \in \mathcal{E}_{\text{ell}}(M, G)$ comme annoncé.

On peut alors conclure : puisque G est $\mathcal{L}$-stable, $\mathcal{E}_M(G) = \{G\}$ et donc $sz \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$. Ainsi $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{L}}$ ce qu'il fallait voir.

Passons au cas des centralisateurs. Fixons un élément semi-simple $\gamma \in G(F)$ tel que le centralisateur connexe G_γ soit quasi-déployé. On veut montrer que G_γ est $\mathcal{L}$-stable. Quitte à remplacer G par un de ses sous-groupes de Lévi (dont on sait qu'ils sont $\mathcal{L}$-stables d'après ce qui précède), on peut et on va supposer que γ est elliptique dans G. Considérons ensuite un sous-groupe de Lévi de G_γ : il est de la forme M_γ où M est un sous-groupe de Lévi de G pour lequel γ est un élément elliptique.

Il existe une paire de Borel (B, T) de G définie sur F tel que $(B \cap G_\gamma, T)$ soit une paire de Borel de G_γ. Le tore complexe $\widehat{T}$ dual de T s'identifie de manière Γ-équivariante à un tore d'une paire de Borel Γ-stable de $\widehat{G}$ et d'une paire analogue de $\widehat{G}_\gamma$. Fixons un élément $\widehat{G}'_\gamma \in \mathcal{E}_{\text{ell}}(M_\gamma, G_\gamma)$: il est associé à un élément $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_\gamma}$. Mais, d'après le lemme 1.1 de [5]

$$Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_\gamma} = Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}\left(Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_\gamma}\right)^0;$$

on peut donc supposer, quitte à translater s par un élément de $Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}$, que $s \in (Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_\gamma})^0$. Comme précédemment, $\widehat{M}$ et $\widehat{M_\gamma}$ s'identifient respectivement à des sous-groupes de Lévi de $\widehat{G}$ et $\widehat{G}_\gamma$ pour lesquels $\widehat{T}$ est un sous-tore. Comme γ est elliptique dans M, on a l'égalité

$$\left(Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_\gamma}\right)^0 = \left(Z^{\Gamma}_{\widehat{M}}\right)^0$$

(de sous-tores de $\widehat{T}$). Par conséquent, on peut associer à s un élément $G' \in \mathcal{E}(M,G)$ tel que $\widehat{G}' = \widehat{G}_s$. Dans $\widehat{T}$, on a l'inclusion

$$\big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'}\big)^0 \subset \big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'_\gamma}\big)^0.$$

Mais comme G'_γ est une donnée elliptique de G_γ et que γ est elliptique dans G, on a les égalités

$$\big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'_\gamma}\big)^0 = \big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}\big)^0 = \big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}\big)^0.$$

Tout cela montre que $G' \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(M,G)$. Comme dans le cas précédent, on conclut que $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$ et donc $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}$ ce qu'il fallait démontrer. □

PROPOSITION 4.4. – *Soit E une extension finie de F. Soit G le groupe* $\mathrm{Res}_{E/F}(H)$*, obtenu par restriction des scalaires de E à F d'un groupe H réductif, connexe, défini sur E et $\mathcal{L}$-stable* (*relativement à E*)*. Alors G est $\mathcal{L}$-stable.*

Preuve. – On note $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et $\Gamma' = \mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$. Le groupe $\widehat{G}$ s'identifie au groupe

$$\big\{f : \Gamma \to \widehat{H} \mid f(\sigma'\sigma) = \sigma'\big(f(\sigma)\big)\ \forall \sigma' \in \Gamma',\ \sigma \in \Gamma\big\}$$

muni de l'action de Γ par translation à droite. Soit M un sous-groupe de Lévi de G ; il existe un sous-groupe de Lévi M^H de H (défini sur E) tel que $M = \mathrm{Res}_{E/F}(M^H)$. En particulier, le groupe complexe dual $\widehat{M}$ s'identifie au sous-espace des fonctions à valeurs dans $\widehat{M^H}$ (identifié à un sous-groupe de Lévi Γ'-stable de $\widehat{H}$). Notons que les éléments de $\widehat{G}^{\Gamma}$ sont des fonctions constantes et à ce titre s'identifient à des éléments de $\widehat{H}^{\Gamma'}$. Soient $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{M}}$ et G' l'élément de $\mathcal{E}(M,G)$ associé à s. Supposons que G' soit elliptique i.e. $(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'})^0 = (Z^{\Gamma}_{\widehat{G}})^0$. On identifie s à un élément de $Z^{\Gamma'}_{\widehat{M}^H}$ et on pose $\widehat{H}' = \widehat{H}_s$. On a les égalités

$$\big(Z^{\Gamma'}_{\widehat{H}'}\big)^0 = \big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'}\big)^0 \quad \text{et} \quad \big(Z^{\Gamma'}_{\widehat{H}}\big)^0 = \big(Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}\big)^0.$$

Par conséquent, s définit un élément de $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(M^H,H)$. Comme H est $\mathcal{L}$-stable, on en déduit que $s \in Z^{\Gamma'}_{\widehat{H}}$ et comme ce dernier groupe s'identifie à $Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$ on obtient bien que $\mathcal{E}_M(G) = \{G\}$. □

4.3. Quelques lemmes sur les groupes $\mathcal{L}$-stables

Dans tout ce paragraphe, G désigne un groupe quasi-déployé $\mathcal{L}$-stable.

LEMME 4.5. – *Soient $M \in \mathcal{L}^G$ et L_1 et L_2 deux sous-groupes de Lévi dans $\mathcal{L}^G(M)$. Si le coefficient d'Arthur* ([2] §7)

$$d^G_M(L_1, L_2)$$

est non nul alors

$$Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_1} \cap Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_2} = Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}.$$

Preuve. – Il suffit de prouver l'inclusion $\subset$, l'autre étant évidente. Prenons donc $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_1} \cap Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_2}$ et considérons le groupe $\widehat{G}' = \widehat{G}_s$. Pour $i = 1$ ou 2, on a $\widehat{L}_i \subset \widehat{G}'$ puisque s est central dans $\widehat{L}_i$.

Par conséquent, on a l'inclusion

$$\big[Z^{\Gamma}_{\widehat{G'}}\big]^0 \subset \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_1} \cap Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_2}\big]^0.$$

Or, l'hypothèse $d^G_M(L_1, L_2) \neq 0$ entraîne que $a^*_{L_1} \cap a^*_{L_2} = a^*_G$ et donc que

$$\big[Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_1} \cap Z^{\Gamma}_{\widehat{L}_2}\big]^0 \subset \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}\big]^0.$$

Des deux dernières inclusions, on déduit que s définit un élément de $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(L_1, G)$. Comme G est $\mathcal{L}$-stable, on a $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$ ce qu'il fallait voir. □

LEMME 4.6. – *Soient $R \in \mathcal{L}^G$ et $\gamma \in R(F)$ semi-simple et elliptique (dans R et dans G). Soient $\widehat{G}$, $\widehat{G}_\gamma$, $\widehat{R}$ et $\widehat{R}_\gamma$ les groupes complexes duaux des groupes G, G_γ, R et R_γ. On a l'égalité*

$$Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma} \cap \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{R}_\gamma}\big]^0 = Z^{\Gamma}_{\widehat{G}} \cap \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{R}}\big]^0.$$

Preuve. – On a les inclusions naturelles $Z^{\Gamma}_{\widehat{G}} \subset Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}$ et $Z^{\Gamma}_{\widehat{R}} \subset Z^{\Gamma}_{\widehat{R}_\gamma}$ et tous ces groupes s'identifient à des sous-groupes Γ-stables d'un même sous-tore maximal et Γ-stable de $\widehat{G}$. Ainsi seule l'inclusion $\subset$ n'est pas évidente. Soit $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma} \cap [Z^{\Gamma}_{\widehat{R}_\gamma}]^0$. Puisque γ est elliptique dans R, on a

$$\big[Z^{\Gamma}_{\widehat{R}_\gamma}\big]^0 = \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{R}}\big]^0$$

et il suffit de montrer que $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$. Du moins, nous avons $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{R}} \cap Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}$. Il est alors clair que

$$\big[Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_s}\big]^0 \subset \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}\big]^0.$$

Mais comme γ est elliptique dans G, on a aussi

$$\big[Z^{\Gamma}_{\widehat{G}_\gamma}\big]^0 = \big[Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}\big]^0.$$

Par conséquent, s définit un élément de $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(R, G)$. Comme G est $\mathcal{L}$-stable, on a bien $s \in Z^{\Gamma}_{\widehat{G}}$. □

5. Changement de base et norme

5.1. Désormais le corps F est local non-archimédien de caractéristique 0. On fixe un groupe G' réductif, connexe, défini sur F et quasi-déployé. On suppose que le groupe dérivé G'_{der} est simplement connexe.

On fixe une extension F_0 de F cyclique de degré d_0 et σ_0 un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_0/F)$. Considérons le composé du morphisme canonique de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $\mathrm{Gal}(F_0/F)$ avec le morphisme de $\mathrm{Gal}(F_0/F)$ dans le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, d_0\}$ qui à σ_0 associe la permutation cyclique $(1\,2\ldots d_0)$. Par abus, on note par la même lettre un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et son image par ce morphisme. On a

$$\mathrm{Res}_{F_0/F}(G')(\overline{F}) = G'(\overline{F}) \times \cdots \times G'(\overline{F}).$$

où l'on a pris d_0 copies de $G'(\overline{F})$ et l'action de Γ sur $\mathrm{Res}_{F_0/F}(G')(\overline{F})$ se traduit par l'action de Γ sur les d_0-uplets donnée par

$$\sigma.(x_1,\ldots,x_{d_0}) = \big(\sigma(x_{\sigma^{-1}(1)}),\ldots,\sigma(x_{\sigma^{-1}(d_0)})\big).$$

On fixe un entier $d' \geqslant 1$ et on considère le groupe sur F

$$G^* = \mathrm{Res}_{F_0/F}(G') \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F_0/F}(G')$$

où le produit possède d' facteurs. On pose $d = d'd_0$. Les éléments de $G^*(\overline{F})$ s'identifient à des d-uplets $((x_1^1,\ldots,x_{d_0}^1),\ldots,(x_1^{d'},\ldots,x_{d_0}^{d'}))$ d'éléments de $G'(\overline{F})$. On note θ l'automorphisme d'ordre d de G^* défini par

$$\theta\big((x_1^1,\ldots,x_{d_0}^1),\ldots,\big(x_1^{d'},\ldots,x_{d_0}^{d'}\big)\big) = \big(\big(x_1^2,\ldots,x_{d_0}^2\big),\ldots,\big(x_1^{d'},\ldots,x_{d_0}^{d'}\big),\big(x_2^1,\ldots,x_{d_0}^1,x_1^1\big)\big).$$

L'action de Γ commute à θ. Considérons alors le G^*-espace tordu $\mathbf{G}^*$ défini ainsi : on pose $\mathbf{G}^*(\overline{F}) = G^*(\overline{F}) \rtimes \theta$ muni de l'action de G^* donnée par

$$g.(x \rtimes \theta) = gx \rtimes \theta,$$

de l'action du groupe de Galois donnée par

$$\sigma(x \rtimes \theta) = \sigma(x) \rtimes \theta$$

et de l'application $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}^*}$ définie par $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}^*}(x \rtimes \theta) = \mathrm{Int}(x) \circ \theta$.

Par plongement diagonal, on identifie G' au sous-groupe de G^* des points fixes sous θ.

5.2. On fixe un 1-cocycle u^* de Γ à valeurs dans $G^*/Z_{\mathbf{G}^*}$. On obtient alors un groupe G défini sur F en tordant l'action de Γ sur G^* par ce cocycle. De même, on munit $\mathbf{G}^*$ de l'action tordue notée $\sigma_{\mathbf{G}}$ donnée pour tout $\sigma \in \Gamma$ par

$$\sigma_{\mathbf{G}}(x \rtimes \theta) = (u_\sigma^*)^{-1}\big(\sigma(x) \rtimes \theta\big)u_\sigma^*.$$

On suppose qu'il existe, pour cette action tordue, un élément Γ-stable. Dans ce cas, l'action tordue définit un G-espace tordu noté $\mathbf{G}$: c'est une forme intérieure de $\mathbf{G}^*$ (au sens de Labesse cf. [26] §III.2).

5.3. On fixe un couple $(\mathbf{P}_0,\mathbf{M}_0)$ formé d'un sous-espace parabolique $\mathbf{P}_0$ de $\mathbf{G}$ et d'un de ses facteurs de Lévi $\mathbf{M}_0$. On suppose que ce couple est défini sur F et minimal parmi de tels couples. On en déduit un couple analogue (P_0,M_0) pour G et un élément $x \in G^*$ de sorte que

$$(\mathbf{P}_0,\mathbf{M}_0) = (P_0x \rtimes \theta, M_0 \rtimes \theta).$$

On fixe une paire de Borel (B_0',T_0') de G' définie sur F. La paire

$$(B_0,T_0) = (B_0' \times \cdots \times B_0', T_0' \times \cdots \times T_0')$$

(produit de d facteurs) est une paire de Borel de G^* définie sur F et θ-stable. Il existe $g \in G^*$ tel que

$$(B_0,T_0) \subset g(P_0,M_0)g^{-1}.$$

On pose

$$u_\sigma = \sigma(g)u_\sigma^* g^{-1}.$$

En appliquant $\sigma \in \Gamma$ à cette inclusion, on en déduit que u_σ conjugue la paire $g(P_0, M_0)g^{-1}$ en une paire qui contient encore (B_0, T_0). Les deux paires sont donc égales : ainsi, $u_\sigma \in gM_0g^{-1}$. Il s'ensuit que $g(P_0, M_0)g^{-1}$ est une paire de G^* définie sur F. En utilisant le fait que la paire est $(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0)$ stable par $\mathrm{Ad}(x) \circ \theta$, on montre que la paire $g(P_0, M_0)g^{-1}$ est θ-stable. On pose alors

$$(\mathbf{P}_0^*, \mathbf{M}_0^*) = \big(gP_0g^{-1} \rtimes \theta, gM_0g^{-1} \rtimes \theta\big).$$

On note par la même lettre φ les morphismes (sur $\overline{F}$) $G \to G^*$ et $\mathbf{G} \to \mathbf{G}^*$ induit par $\mathrm{Ad}(g)$. On pose $\mathcal{L}^{\mathbf{G}} = \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_0)$ et $\mathcal{L}^{\mathbf{G}^*} = \mathcal{L}^{\mathbf{G}^*}(T_0 \rtimes \theta)$. Le morphisme φ induit alors une injection $\mathcal{L}^{\mathbf{G}} \to \mathcal{L}^{\mathbf{G}^*}$. Pour $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, on pose $\mathbf{M}^* = \varphi(\mathbf{M})$. On note également $M' = (M^*)^\theta$: c'est un élément de $\mathcal{L}^{G'} = \mathcal{L}^{G'}(T_0')$. De même, pour $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, on associe $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}^*}(\mathbf{M}^*)$ et $P' \in \mathcal{P}^{G'}(M')$. On obtient ainsi des bijections $\mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \to \mathcal{P}^{\mathbf{G}^*}(\mathbf{M}^*) \to \mathcal{P}^{G'}(M')$.

5.4. Comme θ est semi-simple, tout élément quasi-semi-simple de $\mathbf{G}$ est d'image semi-simple dans $\mathrm{Aut}(G)$. Dans le cadre du changement de base, donc dans tout le reste de l'article, la terminologie « semi-simple » se substitue à « quasi-semi-simple ».

On a supposé G'_{der} simplement connexe. Il en est donc de même pour G_{der} et G^*_{der}. Par un résultat de Steinberg, on sait que cela implique que les centralisateurs d'éléments semi-simples sont connexes. La conjugaison stable et la norme prennent dans cette situation des définitions simples. Deux éléments semi-simples de $\mathbf{G}(F)$ sont *stablement conjugués* s'ils sont conjugués par un élément de $G(\overline{F})$.

Soient $\delta \in \mathbf{G}(F)$ et $\gamma \in G'(F)$ des éléments semi-simples. On note $\varphi(\delta) = x \rtimes \theta$. On pose

$$N^\theta(\delta) = x\theta(x)\dots\theta^{d-1}(x) \in G^*.$$

et on dit que γ est *une norme de* δ s'il existe $y \in G^*(\overline{F})$ tel que

$$\gamma = yN^\theta(\delta)y^{-1},$$

et si l'application $\mathrm{Ad}(y) \circ \varphi$ induit un torseur entre G_δ et G'_γ et que la cochaîne

$$\sigma \in \Gamma \mapsto \sigma(y)u_\sigma y^{-1}$$

qui donne la torsion est à valeurs dans le groupe

$$G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}.$$

En particulier, ce torseur est un torseur intérieur puisque le groupe $Z_{G^*_\gamma}$ agit trivialement (par conjugaison) sur G'_γ.

Rappelons brièvement pourquoi tout élément semi-simple de $\mathbf{G}(F)$ possède une norme dans $G'(F)$ (cf. [20] et [25] p. 56). Il est facile de voir qu'il existe $v \in G^*$ tel que

$$v\varphi(\delta)v^{-1} = \big(1, \dots, 1, N_1^\theta(\delta)\big) \rtimes \theta^*$$

où $N_1^\theta(\delta) \in G'$ est la première composante de $N^\theta(\delta)$. On vérifie ensuite que la classe de G'-conjugaison de $N_1^\theta(\delta)$ est Γ-stable. Puisque G'_{der} est simplement connexe, cette classe possède un élément rationnel (théorème de Kottwitz et Steinberg) i.e. il existe $h \in G'$ et $\gamma \in G'(F)$ tels que

$$hN_1^{\theta}(\delta)h^{-1} = \gamma.$$

Posons $y = hv$. Alors

$$y\varphi(\delta)y^{-1} = (1, \dots, 1, \gamma) \rtimes \theta^*.$$

De cette dernière égalité, on déduit d'une part que $\gamma = yN^{\theta}(\delta)y^{-1}$ et d'autre part que l'application $\mathrm{Ad}(y) \circ \varphi$ induit un torseur entre G_δ et $G^*_{(1,\dots,1,\gamma)\rtimes\theta} = G'_\gamma$ et que la torsion est donnée par la cochaîne $\sigma \in \Gamma \mapsto \sigma(y)u_\sigma y^{-1}$. Cependant, on vérifie que pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $b_\sigma \in Z_{G^*_\gamma}$ tel que

$$\sigma\big[(1, \dots, 1, \gamma) \rtimes \theta\big] = b_\sigma \big[(1, \dots, 1, \gamma) \rtimes \theta\big] b_\sigma^{-1}. \tag{5.1}$$

Par conséquent, la cochaîne $\sigma \mapsto b_\sigma^{-1}\sigma(y)u_\sigma y^{-1}$ est à valeurs dans le groupe

$$G^*_{(1,\dots,1,\gamma)} = G'_\gamma.$$

On voit donc que la cochaîne $\sigma \mapsto \sigma(y)u_\sigma y^{-1}$ est à valeurs dans $G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}$ et que l'application $\mathrm{Ad}(y) \circ \varphi$ induit un torseur intérieur entre G_δ et G'_γ.

Rappelons enfin que, quitte à remplacer γ par un conjugué stable, on peut supposer de plus que le groupe G'_γ est quasi-déployé (cf. [20] lemme 3.3).

5.5. Soit $\gamma \in G'(F)$ un élément semi-simple. Soit $b_\sigma \in Z_{G^*_\gamma}$ qui vérifie l'égalité (5.1) ci-dessus. La cochaîne b_σ définit un cocycle à valeurs dans $Z_{G^*_\gamma}/Z_{G'_\gamma}$ qui ne dépend que de γ.

PROPOSITION 5.1. – *Il existe un élément semi-simple de $\mathbf{G}(F)$ dont γ est la norme si et seulement si le couple (u_σ, b_σ) appartient à l'image de*

$$H^1(F, G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, G^*/Z_{\mathbf{G}^*}) \times H^1(F, Z_{G^*_\gamma}/Z_{G'_\gamma}). \tag{5.2}$$

La flèche sur la seconde composante est obtenue à l'aide de l'isomorphisme

$$G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}/G'_\gamma \simeq Z_{G^*_\gamma}/Z_{G'_\gamma}.$$

Preuve. – La condition nécessaire est évidente. Traitons la réciproque. Le couple (u_σ, b_σ) appartient à l'image de l'application (5.2). Il existe donc $y \in G^*$ tel que les cochaînes $\sigma(y)u_\sigma y^{-1}$ et $b_\sigma^{-1}\sigma(y)u_\sigma y^{-1}$ soient respectivement à valeurs dans $G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}$ et dans G'_γ. Posons

$$\delta = \varphi^{-1}\big(y^{-1}\big((1, \dots, 1, \gamma) \rtimes \theta\big)y\big).$$

On vérifie immédiatement que $\delta \in \mathbf{G}(F)$ et que γ est une norme de δ. $\square$

Soient M un sous-groupe de Lévi de G' et $\gamma \in M(F)$ semi-simple. On note M_{sc} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de M. Pour tout sous-tore maximal $T' \in M$, on note $T'_{M_{\mathrm{sc}}}$ l'image réciproque de T' dans M_{sc}, et T le centralisateur de T' dans G^* : c'est un sous-tore maximal de G^*. Le couple (u_σ, b_σ) définit alors naturellement un élément de

$$H^1(F, G^*_{\mathrm{sc}} \to G^*/Z_{\mathbf{G}^*}) \times H^1(F, T/T').$$

L'ensemble de cohomologie à valeurs dans le module croisé $[G^*_{\mathrm{sc}} \to G^*/Z_{\mathbf{G}^*}]$ est défini dans [12].

DÉFINITION 5.2. – On dit que γ est *potentiellement une norme dans* M (relativement au couple $(\mathbf{G}, G')$) s'il existe T' un sous-tore maximal de M contenant γ tel que (u_σ, b_σ) définisse un élément de l'image de la flèche naturelle

$$H^1(F, T'_{M_{\rm sc}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, G^*_{\rm sc} \to G^*/Z_{\mathbf{G}^*}) \times H^1(F, T/T'). \tag{5.3}$$

PROPOSITION 5.3. – *Soit* $\gamma \in M(F)$ *un élément semi-simple régulier et elliptique dans* M. *Si* γ *est potentiellement une norme dans* M, *alors* γ *est une norme d'un élément de* $\mathbf{G}(F)$.

Preuve. – Notons T' le centralisateur de γ dans M : c'est un sous-tore elliptique de M'. On a une suite exacte

$$H^1(F, T/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, T'_{M_{\rm sc}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^2(F, T'_{M_{\rm sc}})$$

ce qui donne la surjectivité de la première flèche vu que $T'_{M_{\rm sc}}$ est anisotrope (T' est M-elliptique) et que $H^2(F, U) = 1$ pour tout tore anisotrope U. Par injectivité de la flèche d'abélianisation ([12] §5)

$$H^1(F, G^*/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, G^*_{\rm sc} \to G^*/Z_{\mathbf{G}^*}),$$

on voit que (u_σ, b_σ) appartient à l'image de

$$H^1(F, T/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, G^*/Z_{\mathbf{G}^*}) \times H^1(F, T/T').$$

Ici $G'_\gamma = T'$ et $G^*_\gamma = T$. Le résultat découle alors de la proposition 5.1. □

5.6. Dans ce paragraphe, T' est un sous-tore maximal de G' défini sur F. On note T le centralisateur de T' dans G^*. On note M un sous-groupe de Lévi de G' qui contient T'.

Nous aurons besoin de calculer les duaux de Pontryagin des groupes de cohomologie qui interviennent dans la définition 5.2 de la norme potentielle. On utilise la dualité de Tate–Nakayama pour les complexes de tores. Le groupe complexe dual $\widehat{G}$ de G^* s'identifie à un produit de copies de $\widehat{G}'$, le groupe dual de G', et il est muni d'un automorphisme $\hat\theta$, dual de θ, qui permute circulairement ses composantes. On identifie alors $\widehat{G}'$ à $\widehat{G}^{\hat\theta}$ en tant que groupes complexes munis d'une action de Γ. On dispose alors d'une application norme définie par

$$N^{\hat\theta}(z) = z\hat\theta(z)\ldots\hat\theta^{d-1}(z),$$

pour $z \in \widehat{G}$. Si, de plus, z appartient à un sous-groupe commutatif de $\widehat{G}$ et $\hat\theta$-stable alors $N^{\hat\theta}(z)$ est lui-même $\hat\theta$-stable.

Précisons les notations. Le groupe complexe $\widehat{M}$, dual de M, s'identifie à un sous-groupe de Lévi de $\widehat{G}'$. On note $\widehat{G}'_{\rm sc}$ le revêtement simplement connexe de $\widehat{G}'$ et $\widehat{M}_{\rm sc}$ l'image réciproque de $\widehat{M}$ dans $\widehat{G}'_{\rm sc}$. Les centres de $\widehat{G}'_{\rm sc}$ et $\widehat{M}_{\rm sc}$ sont naturellement des sous-groupes de $\widehat{T}'_{\rm sc}$ qui est le tore dual de $T'/Z_{\mathbf{G}^*}$. Pour tout sous-groupe A de $\widehat{T} \times \widehat{T}'_{\rm sc}$, on note A^1 le sous-groupe de A formé des couples $(t, t') \in A$ tels que $N^{\hat\theta}(t) = t'$, où, par abus, on note par une même lettre un élément et son image par la flèche $\widehat{T}'_{\rm sc} \to \widehat{T}'$.

Rappelons que le module croisé $[G^*_{\rm sc} \to G^*/Z_{\mathbf{G}^*}]$ est quasi-isomorphe au complexe de tores $[T_{\rm sc} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}]$ dont le complexe dual est $[(\widehat{T} \times \widehat{T}'_{\rm sc})^1 \to \widehat{T}/Z_{\widehat{G}}]$, lui-même quasi-isomorphe à $[(Z_{\widehat{G}} \times Z_{\widehat{G}'_{\rm sc}})^1 \to 1]$. Le complexe dual de $[T'_{M_{\rm sc}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}]$ est le complexe $[(\widehat{T} \times \widehat{T}'_{\rm sc})^1 \to \widehat{T}'/Z_{\widehat{M}}]$ qui est quasi-isomorphe à $[(\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\rm sc}})^1 \to 1]$. Enfin, le complexe dual de $[T' \to T]$ est quasi-isomorphe à $[\widehat{T}^{1-\hat{\theta}} \to 1]$. On a noté $\widehat{T}^{1-\hat{\theta}}$ l'image de $\widehat{T}$ par le morphisme $t \mapsto t\hat{\theta}(t)^{-1}$. Finalement, la flèche duale de la flèche (5.3) de la définition 5.2 est (cf. §1.7 de [25] qui est une variation autour des résultats de [21])

$$\pi_0\big((Z_{\widehat{G}} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}\big) \times \pi_0\big(\big[\widehat{T}^{1-\hat{\theta}}\big]^{\Gamma}\big) \to \pi_0\big(\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma}\big). \tag{5.4}$$

LEMME 5.4. – *La flèche naturelle*

$$H^1(F, T'_{M_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, T'_{G'_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*})$$

est injective.

Preuve. – Dualement, il s'agit de prouver que

$$\pi_0\big(\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma}\big) \to \pi_0\big(\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma}\big)$$

est surjective. Soit $(t,z) \in (\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$. Alors $z \in Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}} = Z^{\Gamma}_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}}[Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}}]^0$ (cf. lemme 1.1 de [5]). La projection sur le second facteur induit une surjection de $[(\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}]^0$ sur $[Z^{\Gamma}_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}}]^0$. Il s'ensuit que, quitte à translater (t,z) par un élément de $[(\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}]^0$, on peut supposer que $z \in Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}}$ ce qu'il fallait voir. $\square$

LEMME 5.5. – *On suppose G' $\mathcal{L}$-stable. Soit R un sous-groupe de Lévi de G' qui contient T'. On suppose que les sous-groupes de Lévi M et L de G' contiennent R et sont tels que le coefficient d'Arthur*

$$d^G_R(L,M)$$

soit non nul. Dans ce cas, le diagramme commutatif suivant est cartésien.

$$\begin{array}{ccc}
H^1(F, T'_{R_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) & \longrightarrow & H^1(F, T'_{L_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(F, T'_{M_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) & \longrightarrow & H^1(F, T'_{G'_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*})
\end{array}$$

Preuve. – Dualement, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\pi_0((\widehat{T} \times Z_{\widehat{R}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}) & \longleftarrow & \pi_0((\widehat{T} \times Z_{\widehat{L}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\pi_0((\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}) & \longleftarrow & \pi_0((\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma})
\end{array}$$

D'après la preuve du lemme précédent toutes les flèches sont surjectives. Il s'agit alors de montrer qu'un caractère ζ de $(\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$ trivial sur les intersections respectives avec les composantes neutres de $(\widehat{T} \times Z_{\widehat{L}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$ et $(\widehat{T} \times Z_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$ est également trivial sur l'intersection avec la composante neutre de $(\widehat{T} \times Z_{\widehat{R}_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$. Soit (t,z) un élément de

$$\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma} \cap \big[\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{R}_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma}\big]^0.$$

Notons par un indice ad le quotient d'un sous-groupe de Lévi de G' par le centre $Z_{G'}$. Il existe $x \in a^*_{T,\mathbb{C}}$ et $y \in a^*_{R_{\mathrm{ad}},\mathbb{C}}$ tels que $N^\theta(x) = y$ (on confond y et son image par la flèche naturelle $a^*_{R_{\mathrm{ad}},\mathbb{C}} \to a^*_{T,\mathbb{C}}$), $t = \exp(2\pi i x)$ et $z = \exp(2\pi i y)$. Le fait que $d^G_R(L,M)$ soit non nul entraîne que $a^*_{R_{\mathrm{ad}},\mathbb{C}} = a^*_{L_{\mathrm{ad}},\mathbb{C}} + a^*_{M_{\mathrm{ad}},\mathbb{C}}$. Écrivons $y = y_L + y_M$ suivant cette décomposition. On a donc

$$\exp(2\pi i y_L) = z\exp(-2\pi i y_M) \in Z^\Gamma_{\widehat{L}_{\mathrm{sc}}} \cap Z^\Gamma_{\widehat{M}_{\mathrm{sc}}} \subset Z^\Gamma_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}}$$

(l'inclusion résulte du fait que $d^G_R(L,M) \neq 0$ et du lemme 4.5). Ainsi le couple $(\exp(2\pi i y_L/d), \exp(2\pi i y_L))$ appartient à

$$\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma} \cap \big[\big(\widehat{T} \times Z_{\widehat{L}_{\mathrm{sc}}}\big)^{1,\Gamma}\big]^0.$$

Donc ζ est trivial sur cet élément, et de même, sur $(\exp(2\pi i y_M/d), \exp(2\pi i y_M))$. On est alors ramené au cas où $y = 0$. Mais, dans ce cas, $(t,z) = (t,1)$ appartient à la composante neutre de $(\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$ et $\zeta(t,z) = 1$. □

5.7. Introduisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.6. – Le groupe $Z^\Gamma_{\widehat{G}'}$ est inclus dans $N^{\hat\theta}(Z^\Gamma_{\widehat{G}})$.

Remarque. – La composante neutre $[Z^\Gamma_{\widehat{G}'}]^0$ est incluse dans $N^{\hat\theta}(Z^\Gamma_{\widehat{G}})$. L'hypothèse ci-dessus est donc satisfaite dès que le degré d_0 de F_0 sur F est premier à l'ordre du groupe fini $\pi_0(Z^\Gamma_{\widehat{G}'})$. C'est le cas d'un groupe G' semi-simple et simplement connexe (par exemple $G' = SL(n)$) puisque $\widehat{G}'$ est adjoint. C'est aussi le cas d'un groupe G' déployé à groupe dérivé simplement connexe (par exemple $G' = GL(n)$) car alors $Z^\Gamma_{\widehat{G}'}$ est connexe. L'hypothèse est d'autre part trivialement vraie lorsque $F_0 = F$.

Énonçons deux conséquences de cette hypothèse.

LEMME 5.7. – *Soient T' un sous-tore maximal de G' défini sur F et T son centralisateur dans G^*. Sous l'hypothèse* 5.6*, la flèche naturelle ci-dessous est injective.*

$$H^1(F, T'_{G'_{\mathrm{sc}}} \to T/Z_{\mathbf{G}^*}) \to H^1(F, G^*_{\mathrm{sc}} \to G^*/Z_{\mathbf{G}^*}) \times H^1(F, T/T').$$

Preuve. – Nous allons montrer que la flèche duale

$$\pi_0\big((Z_{\widehat{G}} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}\big) \times \pi_0\big(\big[\widehat{T}^{1-\hat\theta}\big]^\Gamma\big) \to \pi_0\big((\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}\big)$$

est surjective. Soit donc $(t,z) \in (\widehat{T} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$. L'image de z dans $\widehat{G}'$ appartient à $Z^\Gamma_{\widehat{G}'}$. Par l'hypothèse 5.6, il existe $u \in Z^\Gamma_{\widehat{G}}$ tel que $(u,z) \in (Z_{\widehat{G}} \times Z_{\widehat{G}'_{\mathrm{sc}}})^{1,\Gamma}$. Alors tu^{-1} est Γ-fixe et de norme 1 : il appartient donc à $[\widehat{T}^{1-\hat\theta}]^\Gamma$ d'où la surjectivité. □

PROPOSITION 5.8. – *Soient δ et δ' deux éléments semi-simples de $\mathbf{G}(F)$ stablement conjugués. Le fait que G' soit $\mathcal{L}$-stable et l'hypothèse* 5.6 *entraînent alors qu'il existe $g \in G$ tel que*

– $g\delta' g^{-1} = \delta$;
– $\mathrm{Ad}(g)$ *induit un F-isomorphisme de $G_{\delta'}$ sur G_δ.*

Preuve. – Puisque δ et δ' sont stablement conjugués, il existe $g \in G$ tel que $g\delta' g^{-1} = \delta$. La cochaîne $\sigma \mapsto \sigma(g)g^{-1}$ définit un cocycle à valeurs dans G_δ. Pour conclure, il suffit de voir que l'image de ce cocycle dans $H^1(F, G_\delta/Z_{G_\delta})$ est triviale donc de voir que

$$\mathrm{Ker}\big(H^1(F,G_\delta) \to H^1(F,G)\big) \subset \mathrm{Ker}\big(H^1(F,G_\delta) \to H^1(F,G_\delta/Z_{G_\delta})\big).$$

Comme le corps F est non-archimédien, ces ensembles pointés de cohomologie sont canoniquement isomorphes à leurs abélianisés (cf. [12] §5 ou [25] §1.6). Ces derniers sont invariants par torsion intérieure. Par conséquent, en considérant un élément $\gamma \in G'(F)$ qui est une norme de δ, on est ramené à prouver que

$$\mathrm{Ker}\big(H^1_{\mathrm{ab}}(F,G'_\gamma) \to H^1_{\mathrm{ab}}(F,G^*)\big) \subset \mathrm{Ker}\big(H^1_{\mathrm{ab}}(F,G'_\gamma) \to H^1_{\mathrm{ab}}(F,G'_\gamma/Z_{G'_\gamma})\big).$$

On peut supposer que G'_γ est quasi-déployé ; soit (B,T) une paire de Borel de G'_γ définie sur F. Prenons ζ un élément de

$$\mathrm{Ker}\big(H^1_{\mathrm{ab}}(F,G'_\gamma) \to H^1_{\mathrm{ab}}(F,G^*)\big). \tag{5.5}$$

Nous allons prouver que ζ appartient à l'image de

$$H^1(F,T) \to H^1_{\mathrm{ab}}(F,G'_\gamma),$$

ce qui permet de conclure puisque $H^1(F, T/Z_{G'_\gamma}) = 1$. En effet, ce groupe (fini) de cohomologie est le dual de Pontryagin du groupe $H^1(F, X^*(T/Z_{G'_\gamma}))$. Ce dernier est bien trivial puisque le $\mathbb{Z}$-module $X^*(T/Z_{G'_\gamma})$ possède une base Γ-stable à savoir l'ensemble des racines simples de T dans B.

Par dualité, ζ est un caractère de $Z^\Gamma_{\hat{G}'_\gamma}$ trivial sur la composante neutre. Il s'agit de prouver que ζ est trivial sur le groupe $Z^\Gamma_{\hat{G}'_\gamma} \cap [\widehat{T}^\Gamma]^0$. Quitte à conjuguer γ, on peut choisir $M \subset L$ des éléments de $\mathcal{L}^{G'}$ qui contiennent γ et tels que $L_\gamma = G'_\gamma$, $M_\gamma = T$, $A_L = A_{G'_\gamma}$ et $A_M = A_T$. Notons que L est $\mathcal{L}$-stable (comme sous-groupe de Lévi de G' cf. lemme 4.3). On a donc successivement en utilisant le lemme 4.6 (appliqué au groupe $\mathcal{L}$-stable L) puis le lemme 1.1 de [5]

$$\begin{aligned} Z^\Gamma_{\hat{G}'_\gamma} \cap \big[\widehat{T}^\Gamma\big]^0 &= Z^\Gamma_{\hat{G}'_\gamma} \cap \big[Z^\Gamma_{\widehat{M}_\gamma}\big]^0 \\ &= Z^\Gamma_{\widehat{L}} \cap \big[Z^\Gamma_{\widehat{M}}\big]^0 \\ &= \big[Z^\Gamma_{\widehat{L}}\big]^0 \big[Z^\Gamma_{\widehat{G}'} \cap \big[Z^\Gamma_{\widehat{M}}\big]^0\big]. \end{aligned}$$

On sait que ζ est trivial sur $[Z^\Gamma_{\hat{G}'_\gamma}]^0 = [Z^\Gamma_{\widehat{L}}]^0$; il reste à montrer que $\zeta(z) = 1$ pour $z \in Z^\Gamma_{\widehat{G}'} \cap [Z^\Gamma_{\widehat{M}}]^0$. Mais, par l'hypothèse 5.6, un tel z appartient à $N^{\hat{\theta}}(Z^\Gamma_{\widehat{G}})$. Comme ζ appartient à l'ensemble (5.5), le caractère $\zeta \circ N^{\hat{\theta}}$ est trivial d'où $\zeta(z) = 1$ ce qui termine la preuve. □

6. Identités de changement de base pour les algèbres de Lie

6.1. On reprend les hypothèses et les notations des § 5.1 à 5.3. On fixe un sous-groupe compact maximal K', resp K, de $G'(F)$, resp. de $G(F)$, en bonne position par rapport à T'_0, resp. M_0. On suppose dans toute cette section que G' est $\mathcal{L}$-stable.

6.2. On fixe $\mathbf{M}_1 \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ et $\delta \in \mathbf{M}_1(F)$ semi-simple tel que la classe de $M_1(F)$-conjugaison ne rencontre aucun sous-espace parabolique propre de $\mathbf{M}_1$. Dans ce cas, δ est elliptique dans $\mathbf{M}_1$. Le morphisme φ induit un torseur intérieur entre $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_1^*$ et l'espace $\mathbf{M}_1^*$ est quasi-déployé. Par conséquent, δ possède une norme dans M_1' : on peut donc trouver des éléments $\gamma \in M_1'(F)$ et $y \in M_1^*$ tels que le groupe $M_{1,\gamma}'$ soit quasi-déployé, $y\varphi(\delta)y^{-1} = (1, \dots, 1, \gamma) \rtimes \theta^*$. On pose

$$H = G_\delta \quad \text{et} \quad H' = G_\gamma'.$$

Le morphisme

$$\varphi_H = \mathrm{Ad}(y) \circ \varphi|_H \tag{6.1}$$

est un torseur intérieur de H sur H' et la cochaîne donnant la torsion,

$$\sigma \in \Gamma \mapsto \sigma(y) u_\sigma y^{-1}, \tag{6.2}$$

est à valeurs dans $M_{1,\gamma}' Z_{G_\gamma^*}$. Notons que γ est un élément elliptique dans M_1'. Le groupe $M_{1,\gamma}'$ est un sous-groupe de Lévi de H' ; on fixe un sous-groupe de Lévi minimal de H' inclus dans $M_{1,\gamma}'$ relativement auquel on définit l'ensemble $\mathcal{L}^{H'}$. On pose $M_0^H = M_{1,\delta}$, ce qui définit un sous-groupe de Lévi minimal de H, puis $\mathcal{L}^H = \mathcal{L}^H(M_0^H)$. Le torseur φ_H induit une bijection $\mathcal{L}^H \to \mathcal{L}^{H'}(M_{1,\gamma}')$ qui envoie M_0^H sur $M_{1,\gamma}'$. Rappelons que $\mathcal{L}^H$ est en bijection avec l'ensemble

$$\left\{\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1) \mid A_{L_\delta} = A_{\mathbf{L}}\right\}. \tag{6.3}$$

C'est pourquoi on note L_δ un élément de $\mathcal{L}^H$, en supposant implicitement que $\mathbf{L}$ est un élément de l'ensemble (6.3). On a alors $\varphi_H(L_\delta) = L_\gamma'$ où, selon les conventions du §5.3, $L' \in \mathcal{L}^{G'}$ est l'image de $\mathbf{L}$ selon la bijection naturelle $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1) \to \mathcal{L}^{G'}(M_1')$. Notons que cette bijection induit une bijection de l'ensemble (6.3) sur

$$\left\{L' \in \mathcal{L}^{G'}(M_1') \mid A_{L_\gamma'} = A_{L'}\right\} \tag{6.4}$$

qui, à son tour, est en bijection avec $\mathcal{L}^{H'}(M_{1,\gamma}')$.

6.3. Si $M \in \mathcal{L}^H$, on note $\Sigma_H(\mathfrak{m})$, resp. $\Sigma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{m})$, l'ensemble des classes de conjugaison M-stable des éléments semi-simples H-réguliers, resp. elliptiques, dans $\mathfrak{m}(F)$. Rappelons que deux éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{m}(F)$ sont M-stablement conjugués s'ils sont conjugués sous $M(\overline{F})$. Le torseur φ_H induit une injection $\Sigma_H(\mathfrak{m}) \to \Sigma_{H'}(\varphi_H(\mathfrak{m}))$ et une bijection $\Sigma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{m}) \to \Sigma_{H',\mathrm{ell}}(\varphi_H(\mathfrak{m}))$. Par abus, on identifiera parfois $\Sigma_H(\mathfrak{m})$ à un sous-ensemble de $\Sigma_{H'}(\varphi_H(\mathfrak{m}))$. On note souvent T_Z, plutôt que H_Z, le centralisateur dans H d'un élément $Z \in \Sigma_H(\mathfrak{m})$ pour rappeler qu'il s'agit d'un tore.

6.4. On fixe des objets comme au § 2.2. On prend pour H' le bicaractère $\psi(\langle \varphi_H^{-1}(.), \varphi_H^{-1}(.)\rangle)$. On suppose également que deux sous-tores maximaux T et T' de H et H', qui sont F-isomorphes par un isomorphisme de la forme $\mathrm{Ad}(h) \circ \varphi_H$ avec $h \in H'$, ont leurs mesures de Haar qui se correspondent par cet isomorphisme. Rappelons que les algèbres de Lie $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ de T et T' sont alors munies de la mesure de Haar obtenue via l'exponentielle. On note $c_\psi(\mathfrak{t})$ le coefficient tel que la mesure auto-duale de $\mathfrak{t}$ soit égale à la mesure fixée sur $\mathfrak{t}$ multipliée par $c_\psi(\mathfrak{t})$. On vérifie alors que $c_\psi(\mathfrak{t}) = c_\psi(\mathfrak{t}')$.

On suppose en outre que les espaces canoniquement isomorphes $a_{\mathbf{M}_0}$ et $a_{\mathbf{M}_0^*}$ sont munis de la même mesure de Haar. On en déduit des mesures sur $a_{M_0^H}$ et $a_{M_0^{H'}}$ (cf. §2.4).

Soient $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $g \in \mathbb{C}[G(F)]$. On dispose alors de la fonction $\hat{j}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g}$ (notée simplement $\hat{j}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}$ dans le corollaire 2.2) définie sur $\Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta) \times \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$. Soit $g' \in \mathbb{C}[G'(F)]$. On a aussi une fonction $\hat{j}_{M',\gamma}^{Q',g'}$ définie sur $\Gamma_{H'}(\mathfrak{m}'_\gamma) \times \mathfrak{h}'_{\mathrm{reg}}(F)$. Si Y est une classe stable et X une classe de conjugaison, on écrit $X \to Y$ pour signifier que X est inclus dans Y. Par exemple, si $X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)$ et $Y \in \Sigma_{H'}(\mathfrak{m}'_\gamma)$ alors $X \to Y$ signifie que φ_H envoie la classe stable de X sur celle de Y.

Soient $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $L_{0,\delta} \in \mathcal{L}^H$, $g \in \mathbb{C}[G(F)]$, et $g' \in \mathbb{C}[G'(F)]$. Alors, pour tous $Y \in \Sigma_{H'}(\mathfrak{m}'_\gamma)$, $Z \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$, $Z' \in \mathfrak{h}'_{\mathrm{reg}}(F)$ on pose

$$\hat{r}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g}(Y,Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{h}) \sum_{X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta),\ X \to Y} \hat{j}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g}(X,Z) \tag{6.5}$$

et

$$\hat{r}_{M',\gamma}^{Q',g'}(Y,Z') = \gamma_\psi(\mathfrak{h}') \sum_{X' \in \Gamma_{H'}(\mathfrak{m}'_\gamma),\ X \to Y} \hat{j}_{M',\gamma}^{Q',g'}(X',Z'). \tag{6.6}$$

6.5. Commençons par une proposition.

PROPOSITION 6.1. – *Sous les hypothèses du* § 6.1*, on a les assertions suivantes.*

1. *Pour tout* $Z \in \Gamma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta})$*,*
$$\hat{r}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g}(Y,Z)$$
ne dépend que de l'image de Z *dans* $\Sigma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta})$*.*
2. *Pour tout* $Z' \in \Gamma_{H',\mathrm{ell}}(L'_{0,\gamma})$*,*
$$\hat{r}_{M',\gamma}^{Q',g'}(Y,Z')$$
ne dépend que de l'image de Z' *dans* $\Sigma_{H',\mathrm{ell}}(L'_{0,\gamma})$*.*

En tenant compte de cette proposition et du fait que φ_H permet d'identifier $\Sigma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta})$ à $\Sigma_{H',\mathrm{ell}}(L'_{0,\gamma})$, on peut énoncer le premier théorème de cette section sous la forme suivante.

THÉORÈME 6.2. – *Soient* $g \in \mathbb{C}[G(F)]$ *et* $L_{0,\delta} \in \mathcal{L}^H$*. Sous les hypothèses du* § 6.1*, il existe* $g' \in \mathbb{C}[G'(F)]$ *tel que pour tous* $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$*,* $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$*,* $Y \in \Sigma_{H'}(\mathfrak{m}'_\gamma)$ *et* $Z \in \Sigma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta})$

$$\hat{r}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g}(Y,Z) = \hat{r}_{M',\gamma}^{Q',g'}(Y,Z).$$

Preuve de la proposition et du théorème. – Prouvons l'assertion 1 de la proposition. En tenant compte de la proposition 2.3, il suffit de montrer le même résultat pour la fonction

$$Z \in \Gamma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta}) \mapsto \sum_{X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta),\ X \to Y} \hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X, (\operatorname{Ad} w)Z\big) \tag{6.7}$$

pour tous $L_\delta \in \mathcal{L}^{M_{Q,\delta}}(M_\delta)$ et $w \in \mathrm{Tran}_H(L_{0,\delta}, L_\delta)$. Soit $Z_1 \in \Gamma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta})$ qui a même image que Z dans $\Sigma_{H,\mathrm{ell}}(L_{0,\delta})$. Il existe donc $l \in L_{0,\delta}$ tel que $Z_1 = \mathrm{Ad}(l)Z$. Par conséquent, $\mathrm{Ad}(w)Z_1 = \mathrm{Ad}(wlw^{-1})\,\mathrm{Ad}(w)Z$ et $wlw^{-1} \in wL_{0,\delta}w^{-1} \subset L_\delta$. Donc $\mathrm{Ad}(w)Z_1$ et $\mathrm{Ad}(w)Z$ sont des éléments de $\Gamma_H(\mathfrak{l}_\delta)$ qui ont même image dans $\Sigma_H(\mathfrak{l}_\delta)$. La forme intérieure quasi-déployée L'_γ de $\mathcal{L}_\delta$ est $\mathcal{L}$-stable : en effet, c'est un sous-groupe de Lévi de G'_γ, G' est $\mathcal{L}$-stable par hypothèse donc la proposition 4.3 s'applique. Alors le théorème 5.6 de [16] affirme que la fonction (6.7) ne dépend que de l'image dans $\Sigma_H(\mathfrak{l}_\delta)$ de $\mathrm{Ad}(w)Z$: cela donne l'assertion 1 de la proposition. Pour les mêmes raisons, on a l'assertion 2.

Passons maintenant à la preuve du théorème. On a un isomorphisme N donné par la norme de $(a_{M_1'}^{G'})^* \simeq (a_{M_1^*}^{G^*})_\theta^*$ sur $(a_{\mathbf{M}_1}^{\mathbf{G}})^* \simeq (a_{M_1^*}^{G^*})^{*,\theta}$. Considérons, pour tout $P' \in \mathcal{P}^{G'}(M_1')$, la fonction définie par

$$v'_{P'}(\lambda, g) = v_{\mathbf{P}}\big(N(\lambda), g\big)$$

pour $\lambda \in (a_{M_1',\mathbb{C}}^{G'})^*$; la fonction $v_{\mathbf{P}}(\lambda, g)$ est celle décrite à la ligne (1.5) du §1.7 et l'espace $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$ est obtenu par la bijection naturelle $P' \mapsto \mathbf{P}$ décrite au §5.3. On vérifie que la famille $(v'_{P'}(\lambda, g))_{P' \in \mathcal{P}^{G'}(M_1')}$ est une (G', M_1')-famille. D'après le théorème 3.3, cette (G', M_1')-famille est équivalente à une (G', M_1')-famille pondérale, disons $(v_{P'}(\lambda, g'))_{P' \in \mathcal{P}^{G'}(M_1')}$ pour un certain $g' \in \mathbb{C}[G'(F)]$. Nous allons prouver l'égalité du théorème pour un tel g'. Partons du développement suivant qu'on déduit de la proposition 2.3

$$\hat{r}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g}(Y, Z) = \sum_{L_\delta \in \mathcal{L}^{M_{Q,\delta}}(M_\delta)} \sum_{w \in \mathrm{Tran}_H(L_{0,\delta}, L_\delta)} v_{\mathbf{L}^w}^{\mathbf{Q}^w}(g) \times \gamma_\psi(\mathfrak{h})$$
$$\sum_{X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta),\ X \to Y} \hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X, \mathrm{Ad}(w)Z\big).$$

On a un développement analogue pour $\hat{r}_{M',\gamma}^{Q',g'}(Y, Z)$ et on va montrer qu'on a une égalité entre les deux, terme à terme.

L'application $L_\delta \mapsto L'_\gamma$ induit une bijection entre $\mathcal{L}^{M_{Q,\delta}}(M_\delta)$ et $\mathcal{L}^{M_{Q',\gamma}}(M'_\gamma)$. Fixons $L_\delta \in \mathcal{L}^{M_{Q,\delta}}$. De plus, le torseur φ_H induit une bijection naturelle $w \mapsto w'$ entre $\mathrm{Tran}_H(L_{0,\delta}, L_\delta)$ et $\mathrm{Tran}_{H'}(L'_{0,\gamma}, L'_\gamma)$ (cf. [16] lemmes 3.1 et 3.2) ; soient $w \in \mathrm{Tran}_H(L_{0,\delta}, L_\delta)$ et w' l'image de w par la bijection précédente. On confond w et w' avec des représentants respectivement dans $H(F)$ et $H'(F)$; on a alors $\varphi_H(w) = lw'$ avec $l \in L_\gamma$.

On pose $L'^{w'} = (w')^{-1}L'w' \in \mathcal{L}^{G'}(M_1')$ et $Q'^{w'} = (w')^{-1}Q'w' \in \mathcal{F}^{G'}(L'^{w'})$. Puisque les (G', M_1')-familles $(v'_{P'}(\lambda, g))_{P' \in \mathcal{P}^{G'}(M_1')}$ et $(v_{P'}(\lambda, g'))_{P' \in \mathcal{P}^{G'}(M_1')}$ sont équivalentes et d'après la proposition 3.2, on a

$$v_{L'^{w'}}^{Q'^{w'}}(g) = (v')_{L'^{w'}}^{Q'^{w'}}(g). \tag{6.8}$$

La bijection $\mathbf{L} \mapsto L'$ de $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$ sur $\mathcal{L}^{G'}(M_1')$ est donnée par $L' = \varphi(L)^{\theta^*}$. En tenant compte de la définition de φ_H (cf. l. (6.1)), on calcule :

$$\begin{aligned}
\big(L^w\big)' &= \big[\varphi\big(L^w\big)\big]^{\theta^*} \\
&= \big[\varphi\big((L^*)^{\varphi_H(w)}\big)\big]^{\theta^*} \\
&= \big[\varphi\big((L^*)^{lw'}\big)\big]^{\theta^*} \\
&= L'^{w'};
\end{aligned}$$

on a utilisé que $y \in M_1^* \subset L_0^* \subset (L^*)^{w'}$. Le même calcul montre que $(Q^w)' = Q'^{w'}$. On vérifie alors que

$$(v')_{L'^{w'}}^{Q'^{w'}}(g) = v_{\mathbf{L}^w}^{\mathbf{Q}^w}(g).$$

Cette égalité combinée avec celle de la ligne (6.8) assure la comparaison des poids.

On a déjà dit que, puisque G' est $\mathcal{L}$-stable, on peut appliquer le théorème 5.6 de [16] : on obtient que

$$\gamma_\psi(\mathfrak{h}) \sum_{X\in\Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta),\ X\to Y} \hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}\big(X, \mathrm{Ad}(w)Z\big) = \gamma_\psi(\mathfrak{h}') \sum_{X'\in\Gamma_{H'}(\mathfrak{m}'_\gamma),\ X'\to Y} \hat{i}_{M'_\gamma}^{L'_\gamma}\big(X', \mathrm{Ad}(w')Z\big);$$

on vérifie en effet que $\mathrm{Ad}(w)Z$ et $\mathrm{Ad}(w')Z$ ont même image dans $\Sigma_{H'}(\mathfrak{l}'_\gamma)$. On prendra garde que les fonctions $\hat{i}_{M_\delta}^{L_\delta}(X,Z)$ correspondent aux fonctions notées de la même façon dans [16] mais multipliées par $c_\psi(\mathfrak{t}_Z)$. Mais cette constante ne dépend que de l'image de Z dans $\Sigma(\mathfrak{h}')$. Cela termine la preuve du théorème. □

7. Transfert non-invariant stable pour le changement de base

7.1. On reprend les notations et les hypothèses de la section précédente. En particulier, le groupe G' est $\mathcal{L}$-stable et G'_{der} est simplement connexe. On exige, de plus, dans toute cette section que G' vérifie l'hypothèse 5.6.

7.2. Pour $\mathbf{M}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, on note $\Gamma_G(\mathbf{M})$, resp. $\Sigma_G(\mathbf{M})$, l'ensemble des classes de $M(F)$-conjugaison, resp. $M(\overline{F})$-conjugaison, d'éléments semi-simples de $\mathbf{M}(F)$ qui sont G-réguliers i.e. dont le centralisateur dans G est un tore. Un tel tore est F-isomorphe par un isomorphisme de la forme $\mathrm{Ad}(g)\circ\varphi$ avec $g\in G^*$ à un sous-tore maximal de G'. On impose aux mesures de Haar fixées sur ces tores de se correspondre par cet isomorphisme. On prend également la même mesure de Haar sur les espaces isomorphes $a_{\mathbf{M}_0}$ et $a_{\mathbf{M}_0^*}$. On a un isomorphisme de $a_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}\simeq(a_{M^*}^{G^*})_\theta$ sur $a_{M'}^{G'}\simeq(a_{M^*}^{G^*})^\theta$ donné par la norme. On en déduit une mesure de Haar sur $a_{M'}^{G'}$.

On définit enfin un facteur $\Delta_{\mathbf{G}}$ sur $\Sigma(G')\times\Gamma(\mathbf{G})$ par

$$\Delta_{\mathbf{G}}(\mu,\delta)=0$$

sauf si μ est une norme de δ (relativement au couple $(\mathbf{G},G')$) auquel cas le facteur vaut 1.

DÉFINITION 7.1. – Soient $f\in C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$ et $f'\in C_c^\infty(G'(F))$. Nous dirons que f' est *un transfert* de f si

1. pour tous $R\in\mathcal{L}^{G'}$, $Q\in\mathcal{F}^{G'}(R)$ et $\mu'\in\Sigma_{G'}(R)$, l'expression

$$\sum_{\mu\in\Gamma_{G'}(R),\ \mu\to\mu'} J_R^Q(\mu,f')$$

(somme sur les μ R-stablement conjugués à μ') est non nulle seulement si μ' est potentiellement une norme dans M_Q ;

2. pour tous $\mathbf{M}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, $\mathbf{Q}\in\mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\mu'\in\Sigma_{G'}(M')$ qui est une norme d'un élément de $\mathbf{M}(F)$ (relativement au couple $(\mathbf{M},M')$)

$$\sum_{\mu\in\Gamma_{G'}(M'),\ \mu\to\mu'} J_{M'}^{Q'}(\mu,f') = \sum_{\delta\in\Gamma_G(\mathbf{M})} \Delta_{\mathbf{M}}(\mu',\delta) J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta,f).$$

Remarque. – Cette définition s'inspire de celle introduite par Labesse pour le changement de base de $GL(n)$ (cf. [24] définition III.3.2).

7.3. Existence du transfert

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème.

THÉORÈME 7.2. – *Sous les hypothèses du* § 7.1 (G' *$\mathcal{L}$-stable,* G'_{der} *simplement connexe, validité de l'hypothèse* 5.6)*, pour toute fonction* $f \in C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$*, il existe une fonction* $f' \in C_c^\infty(G'(F))$ *qui est un transfert de* f.

Le reste de cette section est consacré à la preuve de ce théorème. Les paragraphes 7.4 et 7.5 sont consacrés à des préliminaires techniques.

7.4. On reprend les hypothèses de la section 6 précédente. Rappelons qu'on pose $H = G_\delta$ et $H' = G'_\gamma$. On fixe les objets suivants :

1. une application exponentielle $\exp$ définie sur un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{h}(F)$, qui est invariant par $H(F)$-conjugaison et qui contient les classes stables de ses éléments semi-simples ;
2. une sous-variété analytique $\mathcal{Y}$ de $G(F)$ relativement compacte et contenant 1 et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{h}(F)$ relativement compact inclus dans $\mathcal{D}$ tels que l'application
$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}\times\mathcal{V}\to\mathbf{G}(F),\\&(y,X)\mapsto y^{-1}\exp(X)\delta y\end{aligned}$$
soit un difféomorphisme de $\mathcal{Y}\times\mathcal{V}$ sur un voisinage $\mathcal{W}$ de δ dans $\mathbf{G}(F)$;
3. on suppose de plus que pour tous X et X_1 éléments de $\mathcal{V}$, on a
   (a) pour tout $x \in G$,
   $$x\exp(X)\delta x^{-1} = \exp(X_1)\delta \quad \Longrightarrow \quad x \in H$$
   et pour tout $x \in G(F)$
   $$x^{-1}\exp(X)\delta x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad x \in H(F)\mathcal{Y}\,;$$
   (b) Pour tout $X \in \mathcal{V}$, on a $G_{\exp(X)\delta} = H_X$ et
   $$\left|D^{\mathbf{G}}\big(\exp(X)\delta\big)\right|_F = \left|D^{\mathbf{G}}(\delta)\right|_F\left|D^{\mathfrak{h}}(X)\right|_F.$$

Ces conditions sont loisibles (cf. [25] chap. 3). On munit $\mathcal{Y}$ de la mesure image réciproque de la mesure invariante sur $H(F)\backslash G(F)$. Si $g \in G(F)$ et $\mathbf{M}$ est un sous-espace de $\mathbf{G}$, on pose $\mathbf{M}^g = g^{-1}\mathbf{M}g$. Si f est une fonction définie sur $G(F)$, on définit une fonction ${}^{g_0}f$ par ${}^{g_0}f(.) = f(g_0^{-1}.g_0)$. Pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{g}(F)$ et toute partie A de $G(F)$, on note $\mathcal{A}^A$ l'ensemble des éléments $\mathrm{Ad}(a^{-1})X$ quand a parcourt A et X parcourt $\mathcal{A}$.

LEMME 7.3. – *Soient* $f \in C_c^\infty(G(F))$ *et* $g_0 \in G(F)$ *tels que* $\mathrm{supp}({}^{g_0}f) \subset \mathcal{W}$*. Supposons de plus que* $\mathcal{Y} \subset g_0Kg_0^{-1}$*. Alors, il existe* $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ *à support inclus dans* $\mathcal{V}^{H(F)}$ *qui vérifie les conditions suivantes.*

– *Si* $X \in \mathrm{supp}(\phi)$ *alors* $\exp(X)\delta \in \mathrm{supp}(f)^{G(F)}$.
– *Pour tous* $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$*, un élément* $\delta_1 \in \mathbf{M}(F)$ *semi-simple, elliptique régulier tel que l'orbite de* δ_1 *sous l'action de* $G(F)$ *rencontre le support de* f *est de la forme*
$$\delta_1 = g\big(\exp(X)\delta\big)g^{-1}$$

où $g\in G(F)$ et $X\in\mathcal{V}^{H(F)}$ est semi-simple régulier elliptique dans $\mathfrak{r}_\delta(F)$ avec $\mathbf{R}=g^{-1}\mathbf{M}g\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et δ est un élément elliptique de $\mathbf{R}$. De plus,

$$J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta_1,f)=J_{\mathbf{M}^g,\delta}^{\mathbf{Q}^g,g_0}(X,\phi).$$

Preuve. – Fixons $\mathbf{M}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{Q}\in\mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. Soit $\delta_1\in\mathbf{M}(F)$ semi-simple, elliptique régulier tel que

$$J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta_1,f)\neq 0.$$

Alors, il existe $g\in G(F)$ et $X\in\mathcal{V}^{H(F)}$ tel que $\delta_1=g(\exp(X)\delta)g^{-1}$. On suppose de plus que X est un élément semi-simple régulier elliptique de $\mathfrak{r}_\delta$ avec $R_\delta\in\mathcal{L}^H(M_0^H)$. On pose $T=G_{\delta_1}$ et $T_X=H_X$. Par 3(b), on a

$$\left|D^{\mathbf{G}}(\delta_1)\right|_F=\left|D^{\mathbf{G}}(\delta)\right|_F\left|D^{\mathfrak{h}}(X)\right|_F$$

et $T=gT_Xg^{-1}$. En particulier, puisqu'il s'agit d'éléments elliptiques, $A_{\mathbf{M}}=gA_{R_\delta}g^{-1}$. Mais, selon nos conventions, $\mathbf{R}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$ et $A_{\mathbf{R}}=A_{R_\delta}$. Donc $\mathbf{M}^g=g^{-1}\mathbf{M}g=\mathbf{R}$. De cela, on déduit que δ est un élément elliptique de $\mathbf{M}^g$ et que $\mathbf{M}^g\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$. Puis à l'aide d'un changement de variable,

$$\int\limits_{T(F)\backslash G(F)} f\bigl(x^{-1}g\bigl(\exp(X)\delta\bigr)g^{-1}x\bigr)v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(x)\,dx=\int\limits_{T_X(F)\backslash G(F)} f\bigl(x^{-1}\bigl(\exp(X)\delta\bigr)x\bigr)v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(gx)\,dx.$$

On vérifie que $v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(gx)=v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(x)$. Par 3(a) et l'hypothèse sur le support de f, l'intégrale sur $T_X(F)\backslash G(F)$ peut être remplacée par une intégrale sur $T_X(F)\backslash H(F)\times\mathcal{Y}g_0$. Ainsi la même intégrale peut s'écrire

$$\int\limits_{T_X(F)\backslash H(F)}\int\limits_{\mathcal{Y}} {}^{g_0}f\bigl(y^{-1}h^{-1}\bigl(\exp(X)\delta\bigr)hy\bigr)v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hyg_0)\,dy\,dh.$$

La fonction $x\mapsto v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(xg_0)$ est invariante par translation à droite par l'ouvert $g_0Kg_0^{-1}$. Or on a supposé $\mathcal{Y}\subset g_0Kg_0^{-1}$. On a donc $v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hyg_0)=v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hg_0)$. On définit alors une fonction $\phi\in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ à support dans $\mathcal{D}$ de la façon suivante : pour tout $Z\in\mathcal{D}$

$$\phi(Z)=\left|D^{\mathbf{G}}(\delta)\right|_F\int\limits_{\mathcal{Y}} {}^{g_0}f\bigl(y^{-1}\bigl(\exp(Z)\delta\bigr)y\bigr)\,dy.$$

Il est clair que ϕ vérifie les conditions requises. □

LEMME 7.4. – *Soient $g_0\in\mathbb{C}[G(F)]$ et $\phi\in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ avec* $\operatorname{supp}(\phi)\subset\mathcal{V}^{H(F)}$. *Il existe une fonction $f\in C_c^\infty(G(F))$ avec* $\operatorname{supp}(f)\subset\mathcal{W}^{G(F)}$ *telle que*

- $\operatorname{supp}(f)\subset(\exp(\operatorname{supp}(\phi))\delta)^{G(F)}$;
- *pour tous $\mathbf{M}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, $\mathbf{Q}\in\mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $g\in G(F)$ tels que $\mathbf{M}_1\subset\mathbf{M}^g$ et δ soit un élément elliptique de $\mathbf{M}^g$, on a*

$$J_{\mathbf{M}^g,\delta}^{\mathbf{Q}^g,g_0}(X,\phi)=J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}\bigl(g\bigl(\exp(X)\delta\bigr)g^{-1},f\bigr)$$

pour tout $X\in\mathfrak{r}_\delta(F)\cap D$ semi-simple régulier et elliptique où $\mathbf{R}=\mathbf{M}^g$.

Preuve. – Comme précédemment, on peut supposer que $\mathrm{supp}(\phi) \subset h_0^{-1}\mathcal{V}h_0$ avec $h_0 \in H(F)$. On reprend les notations de la preuve du lemme précédent. On vérifie que

$$J_{\mathbf{M}^g,\delta}^{\mathbf{Q}^g,g_0}(X,\phi) = J_{\mathbf{M}^g,\delta}^{\mathbf{Q}^g,g_0h_0}\big(X,\phi^{h_0}\big).$$

De la sorte, on est ramené au cas où $\mathrm{supp}(\phi) \subset \mathcal{V}$ et, par linéarité, $g_0 \in G(F)$. Quitte à restreindre $\mathcal{Y}$ (ce qui restreint aussi $\mathcal{W}$), on peut supposer que $\mathcal{Y} \subset g_0Kg_0^{-1}$. On fixe $\alpha \in C_c^\infty(\mathcal{Y})$ telle que $\int_{\mathcal{Y}} \alpha(y)\,dy = 1$. On définit f comme la fonction à support dans $\mathcal{W}$ telle que

$$f\big(y^{-1}\exp(X_1)\delta y\big) = \alpha(y)\phi(X_1)$$

pour $y \in \mathcal{Y}$ et $X_1 \in \mathcal{V}$. On pose $T_X = G_X$. On a $T_X \subset g^{-1}Mg$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{T_X(F)\backslash H(F)} \phi\big(h^{-1}Xh\big)v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hg_0)\,dh \\
&\quad= \int\limits_{\mathcal{Y}}\int\limits_{T_X(F)\backslash H(F)} f\big((hy)^{-1}\big(\exp(X)\delta\big)hy\big)v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hg_0)\,dy\,dh \\
&\quad= \int\limits_{T_X(F)\backslash G(F)} f\big(x^{-1}\big(\exp(X)\delta\big)x\big)v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(xg_0)\,dx.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hg_0) = v_{\mathbf{M}^g}^{\mathbf{Q}^g}(hyg_0)$ pour tout $y \in \mathcal{Y}$ puisque $\mathcal{Y} \subset g_0Kg_0^{-1}$ et à 3(a). Il est clair alors que la fonction ${}^{g_0}f$ vérifie les conditions requises. □

7.5. Posons $n = \dim(\mathfrak{h})$. Considérons le polynôme suivant en l'indéterminée λ

$$\det\big(\lambda\,\mathrm{Id} - \mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{h}}\big) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(X)\lambda^k,$$

pour $X \in \mathfrak{h}$. Les fonctions p_k sont polynomiales, définies sur F et invariantes par conjugaison par H. Fixons $\mathcal{T}(H)$ un système de représentants des classes de $H(F)$-conjugaison des sous-tores maximaux de H définis sur F. On note $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_{\mathrm{der}}$ l'algèbre de Lie dérivée. Soit un réel $\epsilon > 0$. On considère D la partie de $\mathfrak{h}(F)$ formée des $Z + X$ avec $Z \in \mathfrak{z}(F)$ tel que $|Z|_F \leqslant \epsilon$ et $X \in \mathfrak{h}_{\mathrm{der}}(F)$ tel que $|p_k(X)|_F \leqslant \epsilon$ pour tout k. Alors D est un voisinage ouvert et fermé de 0 dans $\mathfrak{h}(F)$, invariant par conjugaison et qui contient la classe stable de chacun de ses éléments semi-simples. Supposons de plus que ϵ est suffisamment petit pour que $D \cap \mathfrak{t} \subset \mathcal{V}$ pour tout $T \in \mathcal{T}(H)$. Alors on vérifie que $D \subset \mathcal{V}^{H(F)}$ (cf. par ex. [19] lemme 2.1). Quitte à remplacer $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V} \cap D$, on peut et on va supposer $\mathcal{V}^{H(F)} = D$.

On a des objets analogues pour H' associés à γ : on les note par la même lettre affectée d'un prime. Par contre, on prend le même $\epsilon > 0$. Quitte encore à réduire $\epsilon > 0$ pour que $D' \subset (\mathcal{V}')^{H'(F)}$ et prendre $\mathcal{V}' \cap D'$ au lieu de $\mathcal{V}'$, on suppose que $(\mathcal{V}')^{H'(F)} = D'$. On vérifie que $p'_k = p_k \circ \varphi_H^{-1}$. Il s'ensuit que toute classe stable de H semi-simple et régulière dont l'image par φ_H appartient à D' appartient aussi à D. Réciproquement, l'image par φ_H d'une telle classe incluse dans D appartient à D'.

On fixe $g_0 \in C_c^\infty[G(F)]$. On définit comme au §2.6 un ensemble $\mathcal{C}_H$, une application linéaire J_H sur $\mathcal{C}_H$ et une fonction $\hat{j}_H$ relativement à H, δ et aux intégrales orbitales du type $J_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g_0}$. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ telle que $\mathrm{supp}(\phi) \subset D$. Rappelons que $\hat{\hat{\phi}}(X) = \phi(-X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}(F)$.

On pose $r = -\operatorname{supp}(\hat{\phi})$. Soit $\widetilde{\mathcal{C}}_H$ la partie de $\mathcal{C}_H$ formée d'éléments $(X, \mathbf{M}, \mathbf{Q})$ tels que X appartienne à D : c'est donc une partie H-compacte de $\mathcal{C}_H$. Grâce à la propriété de finitude de Howe (cf. corollaire 2.6), on fixe une famille finie $(Z_i)_{i\in I}$ formée d'éléments de $r \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$ telle que la famille de fonctions $(\hat{j}_H(., Z_i))_{i\in I}$ soit une base de l'espace des fonctions sur $\widetilde{\mathcal{C}}_H$ engendré par $\hat{j}_H(., Z)$ quand Z parcourt $r \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$. Pour tout $i \in I$, il existe une fonction λ_i localement constante sur $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$ telle que pour tous $X \in \widetilde{\mathcal{C}}_H$ et $Z \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$

$$\hat{j}_H(X, Z) = \sum_{i\in I} \hat{j}_H(X, Z_i)\lambda_i(Z).$$

En particulier, pour un tel X, on a

$$J_H(X)(\phi) = \sum_{i\in I} \hat{j}_H(X, Z_i)\Lambda_i(\phi) \tag{7.1}$$

où l'on a posé

$$\Lambda_i(\phi) = \int_{\mathfrak{h}(F)} \left|D^{\mathfrak{h}}(Z)\right|_F^{-1/2} \lambda_i(Z)\hat{\phi}(-Z)\, dZ.$$

On peut bien écrire $Z_i = \operatorname{Ad}(z_i^{-1})Z_i'$ où $z_i \in H(F)$ et Z_i' est un élément semi-simple régulier elliptique d'un certain $L_{i,\delta} \in \mathcal{L}^H(M_0^H)$. Par abus, on note encore Z_i' un élément de $\Gamma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{l}_{i,\delta}')$ dont l'image dans $\Sigma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{l}_{i,\delta}')$ est l'image par φ_H de la classe de $L_{i,\delta}$-conjugaison stable de Z_i'. Appliquons le théorème 6.2 : fixons $g_i' \in \mathbb{C}[G'(F)]$ tel que pour tous $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_1)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $Y \in \Sigma_{H'}(\mathfrak{m}_\gamma')$

$$\hat{r}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},z_i g}(Y, Z_i') = \hat{r}_{M',\gamma}^{Q',g_i'}(Y, Z_i'). \tag{7.2}$$

En utilisant de nouveau la propriété de finitude de Howe, on montre aisément qu'il existe une fonction $\phi_i' \in C_c^\infty(\mathfrak{h}'(F))$ telle que pour tous $X \in D'$, $R_\gamma \in \mathcal{L}^{H'}$ et $Q \in \mathcal{F}^{G'}(R)$

$$J_{R,\gamma}^{Q,g_i'}(X, \phi_i') = \hat{j}_{R,\gamma}^{Q,g_i'}(X, Z_i')\Lambda_i(\phi). \tag{7.3}$$

Quitte à multiplier par la fonction caractéristique de D', qui est localement constante puisque D' est ouvert et fermé, on peut et on va supposer de plus que

$$\operatorname{supp}(\phi_i') \subset D'. \tag{7.4}$$

LEMME 7.5. – *Pour tous $M_\delta \in \mathcal{L}^H$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $Y \in \Sigma_{H'}(M_\gamma')$, on a*

$$\gamma_\psi(\mathfrak{h}) \sum_{X\in\Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta),\ X\to Y} J_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g_0}(X, \phi) = \gamma_\psi(\mathfrak{h}') \sum_{X'\in\Gamma_{H'}(\mathfrak{m}_\gamma'),\ X'\to Y} \sum_{i\in I} J_{M',\gamma}^{Q',g_i'}(X', \phi_i').$$

Preuve. – Supposons tout d'abord que $Y \not\subset D'$. Le membre gauche de l'égalité à prouver est nul : d'une part une classe de $H(F)$-conjugaison qui rencontre le support de ϕ est incluse dans D et d'autre part les images par φ_H des classes dans D appartiennent à D'. Toujours pour des raisons de support, le membre de droite est aussi nul. Supposons $Y \subset D'$. Dans le membre de gauche, on somme sur les éléments $X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_\delta)$ dont l'image par φ_H est Y donc appartient à

D' : par conséquent, l'orbite X est incluse dans D. Pour de tels X, l'intégrale $J_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g_0}(X,\phi)$ est donnée par la ligne (7.1). Il s'ensuit que le membre de gauche de l'égalité à prouver est

$$\sum_{i\in I}\hat{r}_{\mathbf{M},\delta}^{\mathbf{Q},g_0}(Y,Z_i)\Lambda_i(\phi).$$

De même, vu (7.3), le membre de droite vaut

$$\sum_{i\in I}\hat{r}_{M',\gamma}^{Q',g_i'}(Y,Z_i')\Lambda_i(\phi).$$

Le lemme résulte alors du choix des g_i' et des Z_i' (cf. l. (7.2)). □

7.6. Fixons $f\in C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$. On suppose qu'il existe $g_0\in G(F)$ telle que $\mathrm{supp}({}^{g_0}f)\subset\mathcal{W}$ et que $\mathcal{Y}\subset g_0Kg_0^{-1}$ (notations du §7.4). Nous allons prouver l'existence d'un transfert pour une telle fonction f. Le cas général s'en déduit aussitôt par des partitions de l'unité. Nous sommes donc dans les conditions du lemme 7.3 ; ce dernier nous donne une fonction $\phi\in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$. Au §7.5, nous avons associé à g_0 et ϕ un ensemble fini I et des familles $(g_i')_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{C}[G'(F)]$ et $(\phi_i')_{i\in I}$ de fonctions lisses sur $\mathfrak{h}'(F)$ à support inclus dans D'. On pose pour tout $i\in I$

$$\phi_i''(.)=|d|_F^{-(\dim(H)-\mathrm{rang}(H))/2}\frac{\gamma_\psi(\mathfrak{h}')}{\gamma_\psi(\mathfrak{h})}\phi_i'(d^{-1}.). \tag{7.5}$$

Pour tout $i\in I$, on associe à chaque couple (g_i',ϕ_i'') une fonction $f_i'\in C_c^\infty(G'(F))$ qui vérifie les conclusions du lemme 7.4 (relativement à G'). On pose $f'=\sum_{i\in I}f_i'$. Dans la suite, nous allons vérifier que f' est un transfert de f.

7.7. Commençons par un lemme.

LEMME 7.6. – *Soient $R\in\mathcal{L}^{G'}$, $Q\in\mathcal{F}^{G'}(R)$ et $\mu'\in\Sigma_{G',\mathrm{ell}}(R)$. Si la classe stable μ' rencontre le support de f' alors on peut fixer les objets $g\in G'(F)$, $R_1\in\mathcal{L}^{G'}$ et X' de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites*
- $R_1=g^{-1}Rg$;
- $\gamma\in R_1(F)$ *et* $R_{1,\gamma}\in\mathcal{L}^{H'}$;
- $X'\in\Sigma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma})\cap dD'$;
- μ *est* R *stablement conjugué à* $g(\exp(X')\gamma)g^{-1}$;
- *on a l'égalité*

$$\sum_{\mu_1\in\Gamma_{G'}(R),\ \mu_1\to\mu'}J_R^Q(\mu_1,f')=\sum_{X_1\in\Gamma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma})\cap dD',\ X_1\to X'}J_R^Q\big(g\big(\exp(X_1)\gamma\big)g^{-1},f'\big).$$

Preuve. – Par hypothèse, il existe un élément μ_1 dans la classe stable de μ' dont la classe de conjugaison rencontre le support de f'. Cela implique, au vu du support de f', qu'il existe $g_1\in G'(F)$, $R_{1,\gamma}\in\mathcal{L}^{H'}$ et $X_1\in\Gamma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma})\cap dD'$ tel que

$$\mu_1=g_1\big(\exp(X_1)\gamma\big)g_1^{-1}. \tag{7.6}$$

En particulier, on déduit de l'ellipticité des éléments considérés que

$$R=g_1R_1g_1^{-1}. \tag{7.7}$$

Supposons qu'on dispose d'un second élément μ_2 dans la classe stable de μ' dont la classe de conjugaison rencontre le support de f'. Comme à μ_1, on associe à μ_2 des objets indexés par le chiffre 2 et qui vérifient l'analogue de l'égalité (7.6). Comme μ_1 et μ_2, sont dans la même R-classe stable, il existe $r \in R$ tel que $\mu_2 = r\mu_1 r^{-1}$ ou encore

$$\exp(X_2)\gamma = \mathrm{Int}\big(g_2^{-1} r g_1\big)\big(\exp(X_1)\gamma\big). \tag{7.8}$$

Posons $h = g_2^{-1} r g_1$. Par l'assertion 3(a) du §7.4, on doit avoir $h \in H'$ et

$$X_2 = \mathrm{Ad}(h) X_1. \tag{7.9}$$

Cette dernière égalité implique d'une part que

$$R_{2,\gamma} = \mathrm{Ad}(h) R_{1,\gamma} \tag{7.10}$$

et d'autre part que pour tout $\sigma \in \Gamma$, on a $h^{-1}\sigma(h) \in H'_{X_1} \subset R_{1,\gamma}$. Le groupe $R_{1,\gamma}$ est un sous-groupe de Lévi de H' et l'injectivité bien connue de l'application naturelle $H^1(F, R_{1,\gamma}) \to H^1(F, H')$ implique que $h \in H'(F) R_{1,\gamma}(\overline{F})$. Il résulte alors de (7.10) que les sous-groupes $R_{1,\gamma}$ et $R_{2,\gamma}$ sont conjugués par un élément de $H'(F)$. Quitte à translater g_2 à droite par cet élément, on peut supposer que $R_2 = R_1$ et $h \in R_{1,\gamma}$. Mais alors en écrivant

$$g_2 g_1^{-1} = r g_1 h^{-1} g_1^{-1}$$

et en utilisant (7.7), on voit que $g_2 g_1^{-1} \in R(F)$. Quitte à conjuguer μ_2 par $g_2 g_1^{-1}$, ce qui ne change pas sa classe de $R(F)$-conjugaison, on peut supposer que $g_2 = g_1$. Il résulte alors de (7.9) que les éléments X_1 et X_2 sont $R_{1,\gamma}$-stablement conjugués. Si les classes de $R(F)$-conjugaison de μ_1 et μ_2 sont confondues alors on peut prendre $r \in R(F)$ et donc $h \in R_{1,\gamma}(F)$. Les éléments X_1 et X_2 sont alors $R_{1,\gamma}(F)$-conjugués.

En prenant $X' = X_1$ et $g = g_1$, on obtient la conclusion du lemme. □

7.8. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que f' satisfait la condition 1 de la définition 7.1. Soient $R \in \mathcal{L}^{G'}$, $Q \in \mathcal{F}^{G'}(R)$ et $\mu' \in \Sigma_{G'}(R)$; supposons que l'expression

$$\sum_{\mu_1 \in \Gamma_{G'}(R),\ \mu_1 \to \mu'} J_R^Q(\mu_1, f')$$

n'est pas nulle.

Traitons d'abord le cas où μ' est elliptique dans R. Le lemme 7.6 nous donne des éléments $g \in G'(F)$, $R_1 = g^{-1} R g$ et $X' \in \Sigma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma})$ de sorte que

$$\sum_{\mu_1 \in \Gamma_{G'}(R),\ \mu_1 \to \mu'} J_R^Q(\mu_1, f') = \sum_{X_1 \in \Gamma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma}) \cap dD',\ X_1 \to X'} J_R^Q\big(g\big(\exp(X_1)\gamma\big)g^{-1}, f'\big).$$

Mais on a pris $f' = \sum_{i \in I} f'_i$. D'après le choix de f'_i (cf. §7.6), nous avons pour X_1 comme dans la somme ci-dessus,

$$J_R^Q\big(g\big(\exp(X_1)\gamma\big)g^{-1}, f'_i\big) = J_{R^g,\gamma}^{Q^g, g'_i}(X_1, \phi''_i).$$

On peut donc écrire

$$(7.11)\qquad \sum_{\mu_1\in\Gamma_{G'}(R),\ \mu_1\to\mu'} J_R^Q(\mu_1,f')=\sum_{i\in I}\ \sum_{X_1\in\Gamma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma}),\ X_1\to X'} J_{R^g,\gamma}^{Q^g,g_i'}(X_1,\phi_i'').$$

En utilisant la définition de ϕ_i'' (cf. l. (7.5) du §7.6), on obtient

$$J_{R^g,\gamma}^{Q^g,g_i'}(X_1,\phi_i'')=\frac{\gamma_\psi(\mathfrak{h}')}{\gamma_\psi(\mathfrak{h})}J_{R^g,\gamma}^{Q^g,g_i'}\big(d^{-1}X_1,\phi_i'\big).$$

Finalement, en tenant en compte de la ligne (7.3) du §7.5, on a

$$J_{R^g,\gamma}^{Q^g,g_i'}(X_1,\phi_i')=\frac{\gamma_\psi(\mathfrak{h}')}{\gamma_\psi(\mathfrak{h})}\hat{j}_{R^g,\gamma}^{Q^g,g_i'}\big(d^{-1}X_1,Z_i'\big)\Lambda_i(\phi).$$

Rappelons que Z_i' est une classe stable et elliptique d'un sous-groupe de Lévi de H' qui provient de H. En particulier, le membre de droite de la ligne ci-dessus est nul à moins qu'il n'existe un élément de

$$\mathcal{L}^{M_{Q^g,\gamma}}\big((R^g)_\gamma\big)$$

qui provient de H. La cochaîne $\sigma(y)u_\sigma(y)^{-1}$ (cf. l. (6.2) du §6.2) définit donc un élément de l'image de

$$H^1(F,M_{Q^g,\gamma}Z_{G^*_\gamma}/Z_{\mathbf{G}^*})\to H^1(F,G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}/Z_{\mathbf{G}^*}).$$

Il résulte par ailleurs de la preuve du lemme 7.6 que μ' est R-stablement conjugué à

$$g\big(\exp(X')\gamma\big)g^{-1}$$

avec $X'\in\Sigma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{r}_{1,\gamma})\cap dD'$.

À γ, on associe b_σ une cochaîne à valeurs dans $Z_{G^*_\gamma}$ qui vérifie l'identité (5.1) du §5.4. Par construction de γ, la cochaîne $\sigma(y)u_\sigma y^{-1}$ définit un élément de $H^1(F,G'_\gamma Z_{G^*_\gamma}/Z_{\mathbf{G}^*})$ qui s'envoie sur (u_σ,b_σ) par l'application (5.2) (définie à la proposition 5.1). On note T' le centralisateur de X' dans R_1. On note T le sous-tore maximal de G^* qui est le centralisateur de T' dans G^*. Fixons une cochaîne β_σ à valeurs dans T telle que

$$\sigma\big[\big(1,\ldots,1,\exp(X')\gamma\big)\rtimes\theta\big]=\beta_\sigma\big[\big(1,\ldots,1,\exp(X')\gamma\big)\rtimes\theta\big]\beta_\sigma^{-1}.$$

Les cochaînes b_σ et β_σ définissent le même élément de $H^1(F,T/T')$. Pour le voir, choisissons $t\in T$ de sorte que

$$\big(1,\ldots,1,\exp(X')\big)\rtimes\theta=t\big[\big(\exp(X'/d),\ldots,\exp(X'/d)\big)\rtimes\theta\big]t^{-1}.$$

On vérifie alors que $\sigma(t)b_\sigma t^{-1}$ appartient à $\beta_\sigma T'$.

On a une flèche d'abélianisation de $M_{Q^g,\gamma}Z_{G^*_\gamma}/Z_{\mathbf{G}^*}$ vers un complexe de longueur 1 qui est quasi-isomorphe à $[T''\to T'Z_{G^*_\gamma}/Z_{\mathbf{G}^*}]$ où T'' désigne l'image réciproque de T' dans le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $M_{Q^g,\gamma}$. Ce dernier s'envoie naturellement dans le complexe $[T'_{M_{Q^g,sc}}\to T/Z_{\mathbf{G}^*}]$; rappelons que $M_{Q^g,sc}$ désigne le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de M_{Q^g}.

Finalement, on voit que (u_σ,β_σ) appartient à l'image de

$$H^1\big(F,[T'_{M_{Q^g,sc}}\to T/Z_{\mathbf{G}^*}]\big)\to H^1(F,G^*_{\mathrm{sc}}\to G^*/Z_{\mathbf{G}^*})\times H^1(F,T/T'),$$

ou encore, selon la définition 5.2, $\exp(X')\gamma$ est potentiellement une norme dans $M_{{}^gQ}$. On en déduit aisément que μ' est potentiellement une norme dans M_Q.

Le cas d'un élément μ' non elliptique se déduit directement du cas elliptique et de la formule de descente suivante. Il existe un sous-groupe de Lévi $S\in\mathcal{L}^R$ tel que la classe de μ' rencontre $S(F)$ selon une réunion finie de S-classes stables elliptiques. En outre,

$$\sum_{\mu_1\in\Gamma_{G'}(R),\ \mu_1\to\mu'} J_R^Q(\mu_1,f')=\sum_{L\in\mathcal{L}^{M_Q}} d_S^{M_Q}(R,L)\sum_{\mu_1\in\Gamma_{G'}(S),\ \mu_1\to\mu'} J_S^{Q_L N_Q}(\mu_1,f').$$

On reprend ici sans plus de commentaire les notations d'Arthur concernant la descente des (G,M)-familles (cf. [2]). En utilisant ce qui précède appliqué au sous-groupe de Lévi S, le membre de droite de l'égalité ci-dessus est non nul seulement s'il existe $L\in\mathcal{L}^{M_Q}$ tel que μ soit potentiellement une norme dans L. *A fortiori*, μ est potentiellement une norme dans M_Q.

7.9. Montrons ensuite que f' satisfait la condition 2 de la définition 7.1. Fixons $\mathbf{M}\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$, $\mathbf{Q}\in\mathcal{F}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\mu'\in\Sigma_{G'}(M')$ qui est une norme d'un élément de $\mathbf{M}(F)$. On commence par le cas où μ' est elliptique dans M'.

LEMME 7.7. – *Si l'un des deux membres de l'égalité* 2 *de la définition* 7.1 *est non nul alors il existe* $g\in G'(F)$, $\mathbf{M}_1\in\mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ *et* X' *de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites*
– $M'_1=g^{-1}M'g$;
– $\delta\in\mathbf{M}_1(F)$ *et* $M_{1,\delta}\in\mathcal{L}^H$;
– $X'\in\Sigma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{m}'_{1,\gamma})\cap dD'$;
– μ' *est* M'*-stablement conjugué à* $g(\exp(X')\gamma)g^{-1}$.

Preuve. – Supposons que le membre relatif à f' soit non nul. Le lemme 7.6 donne des objets g, $M'_1\in\mathcal{L}^{H'}$ et X' qui vérifient les conditions voulues 1, 3 et 4. Il reste à vérifier que $M'_{1,\gamma}$ provient de H.

Partons du fait que μ' est une norme d'un élément de $\mathbf{M}(F)$. Il existe donc $\delta'\in\mathbf{M}(F)$ et $m\in M$ tel que

$$(1,\ldots,1,\mu')=m\varphi(\delta')m^{-1}.$$

Notons T' le centralisateur de X' dans $M'_{1,\gamma}$: c'est un sous-tore maximal de G' et on note T le centralisateur de T' dans G^*. Soit $t\in T$ tel que

$$\big(1,\ldots,1,\gamma\exp(X')\big)=t\exp(X'/d)(1,\ldots,1,\gamma)\theta\big(t^{-1}\big).$$

Comme μ' est stablement conjugué à $g(\exp(X')\gamma)g^{-1}$, il existe $x\in G^*$ tel que

$$\exp(X'/d)(1,\ldots,1,\gamma)=x\varphi(\delta')x^{-1}.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ad}(x)\circ\varphi$ induit un F-isomorphisme entre les tores $G_{\delta'}$ et T'. Soit $Y\in\mathfrak{g}_{\delta'}$ qui s'envoie sur X'/d via l'isomorphisme dérivé. On a alors

$$(1,\ldots,1,\gamma)=x\varphi(\delta'_Y)x^{-1},$$

avec $\delta'_Y = \exp(-Y)\delta'$. Donc γ est une norme de δ'_Y et le sous-groupe de Lévi $M_{1,\gamma}$ provient de $G_{\delta'_Y}$ puisque T' provient de $G_{\delta'_Y}$. Or δ a aussi pour norme γ. Les éléments δ et δ_Y sont donc stablement conjugués et leurs centralisateurs sont canoniquement isomorphes (cf. proposition 5.8). Il en résulte bien que $M'_{1,\gamma}$ provient de $H = G_\delta$. Quitte à conjuguer $M'_{1,\gamma}$ par un élément de $H'(F)$, on peut supposer qu'il existe $\mathbf{M}_1 \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ tel que $M_{1,\delta} \in \mathcal{L}^H$ et $M'_{1,\gamma} = \varphi_H(M_{1,\delta})$.

Si c'est le membre relatif à f qui est non nul, il existe δ_1 un élément de $\mathbf{M}(F)$ qui a pour norme μ' et qui appartient au support de f. Un tel élément s'écrit

$$\delta_1 = g_1\big(\exp(X)\delta\big)g_1^{-1} \tag{7.12}$$

avec $g_1 \in G(F)$ et $X \in D$. On peut bien supposer que X est un élément semi-simple H-régulier elliptique de $\mathfrak{r}_\delta(F)$ avec $R_\delta \in \mathcal{L}^H$. Rappelons que R_δ est le centralisateur de δ dans R pour un certain $\mathbf{R} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$. Notons Y une image de X par φ_H dans $\mathfrak{r}'_\gamma(F)$. En particulier, $Y \in D'$. Remarquons que $\exp(dY)\gamma$ est une norme de $\exp(X)\delta$. Par conséquent, $\exp(dY)\gamma$ et μ' sont G'-stablement conjugués : il existe $g_2 \in G'$ tel que

$$\mu' = g_2 \exp(dY)\gamma g_2^{-1}.$$

Comme μ' et $\exp(dY)\gamma$ sont des éléments elliptiques semi-simples G'-réguliers respectivement de M' et R', on voit qu'on peut supposer que $g_2 = mg$ avec $m \in M'(\overline{F})$ et $g \in G'(F)$. On obtient alors le résultat voulu avec g, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}$, $X' = dY$. $\square$

Pour prouver la condition 2 du théorème 7.2, il suffit évidemment de se placer sous l'hypothèse du lemme 7.7 dont on reprend les notations. De même qu'au §7.8, on en déduit que

$$\sum_{\mu_1 \in \Gamma_{G'}(M'),\ \mu_1 \to \mu'} J_{M'}^{Q'}(\mu_1, f') = \sum_{i \in I} \sum_{X_1 \in \Gamma_{H',\mathrm{ell}}(\mathfrak{m}'_{1,\gamma}),\ X_1 \to d^{-1}X'} \frac{\gamma_\psi(\mathfrak{h}')}{\gamma_\psi(\mathfrak{h})} J_{M'_1,\gamma}^{Q'^g, g'_i}(X_1, \phi'_i)$$
$$= \sum_{X \in \Gamma_H(\mathfrak{r}_\delta),\ X \to d^{-1}Y} J_{\mathbf{M}^g,\delta}^{\mathbf{Q}^g, g_0}(X, \phi).$$

Fixons une classe $Y \in \Gamma_{H,\mathrm{ell}}(\mathfrak{m}_{1,Y})$ qui s'envoie par φ_H sur X. Soit $l \in G(F)$ tel que $\varphi^{-1}(g)l^{-1} \in M$. Un tel élément existe puisque $M'^g = R'$ et donc $M^{\varphi^{-1}(g)} \in \mathcal{L}^G$ (cf. lemme 3.2 de [16]). D'après le lemme 7.5, le membre de droite de l'égalité ci-dessus vaut aussi

$$\sum_{X \in \Gamma_H(\mathfrak{m}_{1,\delta}),\ X \to d^{-1}Y} J_{\mathbf{M}^l,\delta}^{\mathbf{Q}^l, g_0}(X, \phi).$$

ou encore

$$\sum_{\delta_1 \in \Gamma_G(\mathbf{M}),\ \delta_1 \to l\exp(d^{-1}Y)\delta l^{-1}} J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta_1, f).$$

On laisse au lecteur de vérifier que $l\exp(d^{-1}Y)\delta l^{-1}$ est un élément de $\mathbf{M}(F)$ qui admet comme norme μ' dans M'. Par conséquent, cette dernière somme n'est autre que

$$\sum_{\delta_1 \in \Gamma_G(\mathbf{M})} \Delta_{\mathbf{M}}(\mu', \delta_1) J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta_1, f),$$

ce qu'il fallait vérifier.

Il reste à enlever la restriction elliptique. Fixons δ_1 un élément de $\mathbf{M}(F)$ dont $\mu' \in \Sigma_{G'}(M')$ est une norme. Supposons que μ' n'est pas elliptique dans M'. Alors δ_1 n'est pas elliptique dans $\mathbf{M}$. Quitte à conjuguer δ_1 par un élément de $M(F)$, on peut supposer qu'il existe $\mathbf{R} \in \mathcal{L}^{\mathbf{M}}$ tel que δ_1 soit un élément elliptique de $\mathbf{R}(F)$. Quitte à conjuguer μ' par un élément de M', on peut supposer que μ' est une norme dans R' de δ_1. Alors μ' est elliptique dans R'. La classe de conjugaison M'-stable de μ' coupe $R'(F)$ selon une réunion finie de classes de conjugaison R'-stable elliptiques dont on note $\mu'_1, \ldots, \mu'_k$ un système de représentants. On conclut alors en remarquant qu'on a les formules de descente suivantes :

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu_1 \in \Gamma_{G'}(M'),\ \mu_1 \to \mu'} J_{M'}^{Q'}(\mu_1, f')\\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{L' \in \mathcal{L}^{M_{Q'}}(R')} d_{R'}^{M_{Q'}}(M', L') \sum_{\mu_1 \in \Gamma_{G'}(R'),\ \mu_1 \to \mu'_j} J_{R'}^{Q_{L'}N_{Q'}}(\mu_1, f')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\sum_{\delta_1 \in \Gamma_G(\mathbf{M})} \Delta_{\mathbf{M}}(\mu', \delta_1) J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{Q}}(\delta_1, f)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mathbf{L} \in \mathcal{L}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{R})} d_{\mathbf{R}}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M}, \mathbf{L}) \sum_{\delta_1 \in \Gamma_G(\mathbf{R})} \Delta_{\mathbf{R}}(\mu'_j, \delta_1) J_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Q_L}N_Q}(\delta_1, f).\end{aligned}$$

On a une bijection naturelle $\mathbf{L} \to L'$ entre les ensembles de sommation des deuxièmes sommes dans les deux dernières lignes. Remarquons que

$$d_{R'}^{M_{Q'}}(M', L') = d_{\mathbf{R}}^{\mathbf{M_Q}}(\mathbf{M}, \mathbf{L}).$$

Les sections $L' \mapsto Q_{L'}N_{Q'}$ et $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{Q_L}N_Q$ dépendent de certains choix mais il est clair qu'il y a un choix compatible au sens où $Q_{L'}N_{Q'} = (\mathbf{Q_L}N_Q)'$. Le cas non elliptique se déduit donc du cas elliptique.

8. Application à la formule des traces locale

8.1. On reprend les hypothèses de la section précédente (cf. §7.1). Notre référence pour ce paragraphe est l'article [4] d'Arthur et plus précisément la section 12. Pour tout couple $(g_1, g_2) \in G(F) \times G(F)$, on introduit la $(\mathbf{G}, \mathbf{M})$-famille $v_{\mathbf{P}}(g_1, g_2)$ définie pour tous $\mathbf{P} \in \mathcal{P}^{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\lambda \in ia_{\mathbf{M}}^*$ par

$$v_{\mathbf{P}}(\lambda, g_1, g_2) = \exp\big(-\lambda\big(H_{\mathbf{P}}(g_2) - H_{\overline{\mathbf{P}}}(g_1)\big)\big), \tag{8.1}$$

où $\overline{\mathbf{P}}$ désigne le sous-espace parabolique opposé (en un sens évident) à $\mathbf{P}$.

Soit $f = f_1 \otimes f_2 \in C_c^\infty(\mathbf{G}(F)) \otimes C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$. Pour tout $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ et tout couple $(\delta_1, \delta_2) \in \Gamma_G(\mathbf{M})^2$, on introduit, par analogie avec les distributions qui apparaissent dans la formule des traces locale d'Arthur (cf. [4] section 12), l'intégrale orbitale pondérée $J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\delta, f)$ définie par

(8.2)

$$\big|D^{\mathbf{G}}(\delta_1)\big|^{1/2}\big|D^{\mathbf{G}}(\delta_2)\big|^{1/2} \int_{G_{\delta_1}(F)\backslash G(F)} \int_{G_{\delta_2}(F)\backslash G(F)} f_1\big(g_1^{-1}\delta_1 g_1\big) f_2\big(g_2^{-1}\delta_2 g_2\big) v_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(g_1, g_2)\, dg_1\, dg_2.$$

8.2. Soient f_1 et f_2 deux fonctions dans $C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$. D'après le théorème 7.2, on peut considérer leur transfert respectif f_1' et f_2' à G'.

PROPOSITION 8.1. – *Sous les hypothèses du* § 7.1*, on a*

1. *pour tous* $R \in \mathcal{L}^{G'}$ *et* $\gamma \in \Sigma_{G',\mathrm{ell}}(R)$*, l'expression*

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_{G'}(R)^2,\ (\gamma_1,\gamma_2)\to(\gamma,\gamma)} J_R^{G'}(\gamma_1,\gamma_2,f_1'\otimes f_2')$$

est nulle sauf si γ *est une norme d'un élément de* $\mathbf{G}(F)$;

2. *pour tous* $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^{\mathbf{G}}$ *et* $\gamma \in \Sigma_{G',\mathrm{ell}}(M')$*, on a*

$$\sum_{(\delta_1,\delta_2)\in\Gamma_G(\mathbf{M})^2} \Delta(\gamma,\delta_1)\Delta(\gamma,\delta_2) J_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\delta_1,\delta_2,f_1\otimes f_2)$$
$$= \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_{G'}(M')^2,\ (\gamma_1,\gamma_2)\to(\gamma,\gamma)} J_{M'}^{G'}(\gamma_1,\gamma_2,f_1'\otimes f_2').$$

Preuve. – Prouvons l'assertion 1. Soient $R \in \mathcal{L}^{G'}$ et $\gamma \in \Sigma_{G'}(R)$. Par la formule de scindage des intégrales orbitales pondérées, on a

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_{G'}(R)^2,\ (\gamma_1,\gamma_2)\to(\gamma,\gamma)} J_R^{G'}(\gamma,f_1'\otimes f_2')$$
$$= \sum_{L_1,L_2\in\mathcal{L}^{G'}(R)} d_R^{G'}(L_1,L_2)\Bigg[\sum_{\gamma_1\in\Gamma_{G'}(R),\ \gamma_1\to\gamma} J_R^{\overline{Q}_{L_1}}(\gamma_1,f_1')\Bigg]$$
$$\times\Bigg[\sum_{\gamma_2\in\Gamma_{G'}(R),\ \gamma_2\to\gamma} J_R^{Q_{L_2}}(\gamma_2,f_2')\Bigg].$$

Notons T' le centralisateur de γ dans G' et T le centralisateur de T' dans G^*. On associe à γ une cochaîne b_σ à valeurs dans T/T' (cf. §5.5). D'après le point 1 de la définition 7.1 du transfert, cette expression est nulle sauf s'il existe un couple $(L_1,L_2)\in\mathcal{L}^{G'}(R)^2$ tel que $d_R^{G'}(L_1,L_2)\neq 0$ et si γ est potentiellement une norme dans L_1 et L_2. Il s'ensuit qu'on peut trouver, pour $i=1,2$ des cocycles $v_i \in H^1(F,T'_{L_{i,\mathrm{sc}}}\to T/Z_{\mathbf{G}^*})$ d'image (u_σ,b_σ) dans $H^1(F,G^*_{\mathrm{sc}}\to G^*/Z_{\mathbf{G}^*})\times H^1(F,T/T')$. Les éléments v_1 et v_2 ont même image dans $H^1(F,T'_{G'_{\mathrm{sc}}}\to T/Z_{\mathbf{G}^*})$ (par le lemme 5.7). Mais alors le lemme 5.5 montre que v_1 et v_2 sont images d'un même élément de $H^1(F,T'_{R_{\mathrm{sc}}}\to T/Z_{\mathbf{G}^*})$. Il est clair alors que γ est potentiellement une norme dans R. Or γ est elliptique dans R et c'est donc une norme par la proposition 5.3.

Si γ est une norme d'un élément de $\mathbf{M}(F)$, l'assertion 2 est une conséquence des formules de scindage et de la définition du transfert. Si γ n'est pas une norme, le membre de gauche de l'assertion 2 est nul. Le membre de droite est nul sauf si γ est potentiellement une norme dans M'. Cependant $u_\sigma \in M^*$ (cf. § 5.3) et la flèche

$$H^1(F,M^*_{\mathrm{sc}}\to M^*/Z_{\mathbf{G}^*})\to H^1(F,G^*_{\mathrm{sc}}\to G^*/Z_{\mathbf{G}^*})$$

est injective. On en déduit que γ est potentiellement une norme dans M' relativement au couple $(\mathbf{M},M')$. La proposition 5.3 permet de conclure que γ est une norme d'un élément de $\mathbf{M}(F)$. □

Remerciements

Je suis particulièrement reconnaissant à J.-L. Waldspurger de m'avoir généreusement permis d'inclure ici certains de ses résultats. Je remercie également J.-P. Labesse pour de nombreuses discussions sur les espaces tordus.

RÉFÉRENCES

[1] ARTHUR J., The trace formula in invariant form, *Ann. of Math.* **114** (1981) 1–74.
[2] ARTHUR J., The invariant trace formula I. Local theory, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (2) (1988) 323–383.
[3] ARTHUR J., The local behaviour of weighted orbital integrals, *Duke Math. J.* **56** (1988) 223–293.
[4] ARTHUR J., A local trace formula, *Publ. Math. Inst. Hautes Études* **73** (1991) 5–96.
[5] ARTHUR J., On the transfer of distributions: weighted orbital integrals, *Duke Math. J.* **99** (2) (1999) 209–283.
[6] ARTHUR J., A stable trace formula II. Global descent, *Invent. Math.* **143** (1) (2001) 157–220.
[7] ARTHUR J., A stable trace formula. I. General expansions, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2) (2002) 175–277.
[8] ARTHUR J., A stable trace formula. III. Proof of the main theorems, *Ann. of Math. (2)* **158** (3) (2003) 769–873.
[9] ARTHUR J., CLOZEL L., Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula, Annals of Mathematics Studies, vol. **120**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
[10] BOREL A., TITS J., Compléments à l'article : "Groupes réductifs", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **41** (1972) 253–276.
[11] BOREL A., WALLACH N., Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
[12] BOROVOI M., Abelian Galois cohomology of reductive groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **132** (626) (1998), viii+50.
[13] BOURBAKI N., Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : Systèmes de racines, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. **1337**, Hermann, Paris, 1968.
[14] CARTIER P., Representations of p-adic groups: a survey, in: *Automorphic Forms, Representations and L-Functions, Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. **XXXIII**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 111–155.
[15] CASSELMAN W., The unramified principal series of p-adic groups. I. The spherical function, *Compositio Math.* **40** (3) (1980) 387–406.
[16] CHAUDOUARD P.-H., Sur certaines identités endoscopiques entre transformées de Fourier, *J. reine angew. Math.* **585** (2005) 1–59.
[17] DIGNE F., MICHEL J., Groupes réductifs non connexes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **27** (3) (1994) 345–406.
[18] DIGNE F., MICHEL J., Points fixes des automorphismes quasi-semi-simples, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (12) (2002) 1055–1060.
[19] HARISH-CHANDRA, Admissible Invariant Distributions on Reductive p-adic Groups, Notes by S. DeBacker and P.J. Sally Jr., Univ. Lect. Series, vol. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
[20] KOTTWITZ R., Rational conjugacy classes in reductive groups, *Duke Math. J.* **49** (4) (1982) 785–806.
[21] KOTTWITZ R., Stable trace formula: cuspidal tempered terms, *Duke Math. J.* **51** (1984) 611–650.
[22] KOTTWITZ R., Base change for unit elements of Hecke algebras, *Compositio Math.* **60** (2) (1986) 237–250.
[23] KOTTWITZ R., SHELSTAD D., Foundations of twisted endoscopy, *Astérisque* **255** (1999).
[24] LABESSE J.-P., Noninvariant base change identities, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **61** (1995), iv+113.
[25] LABESSE J.-P., Cohomologie, stabilisation et changement de base, *Astérisque* **257** (1999), vi+161. Appendice A par L. Clozel et J.-P. Labesse, et Appendice B par L. Breen.

[26] LABESSE J.-P., Stable twisted trace formula: elliptic terms, *J. Inst. Math. Jussieu* **3** (4) (2004) 473–530.
[27] STEINBERG R., Endomorphisms of linear algebraic groups, in: Steinberg R. (Ed.), Collected Works, vol. **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 229–285. Edited and with a foreword by J.-P. Serre.
[28] WALDSPURGER J.-L., Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques, *J. reine angew. Math.* **465** (1995) 41–99.
[29] WALDSPURGER J.-L., Le lemme fondamental implique le transfert, *Compositio Math.* **105** (1997) 153–236.

(Manuscrit reçu le 2 janvier 2006 ;
accepté, après révision, le 21 décembre 2006.)

Pierre-Henri CHAUDOUARD
CNRS et Université Paris-Sud,
Laboratoire de Mathématique d'Orsay,
Bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex, France
E-mail : pierre-henri.chaudouard@math.u-psud.fr